

Tiefunelastische Streuung

Eine Methode zur Untersuchung der Protonstruktur und der starken Wechselwirkung

2. Dezember 2007, Ueli Straumann, Universität Zürich

Inhaltsverzeichnis

1	Strukturuntersuchung an komplexen Objekten	1
1.1	Elastische Streuung	2
1.2	Unelastische Streuung	5
1.3	Ein hypothetisches Beispiel zur Veranschaulichung von x	6
1.4	Ein Beispiel-Ereignis der tiefunelastischen Streuung	8
2	Messung der Streuparameter bei HERA	9
3	Strukturfunktionen	11
3.1	Elektromagnetische Wechselwirkung	11
3.2	Das Partonmodell	12
3.3	Skalenverletzung	13
3.4	Die longitudinale Strukturfunktion	15
3.5	Schwacher Geladener Strom: W Austausch	16
3.6	Schwacher Neutraler Strom: Z_0 Austausch	18
4	Partondichten in der QCD	19
4.1	Generelle Aussagen	19
4.2	Altarelli - Parisi - Gleichungen	21
4.3	Bestimmung der Gluondichte und Messung von α_s	24

1 Strukturuntersuchung an komplexen Objekten

Wollen wir die starke Wechselwirkung experimentell untersuchen, sehen wir uns unmittelbar mit dem Problem konfrontiert, dass – im Gegensatz zu den Objekten der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung – die *Quarks* und *Gluonen* in der Natur gar nicht frei vorkommen. Das über alle Grenzen steigende Potential der starken Wechselwirkung erzeugt aus dem Vakuum so lange Quark- Antiquarkpaare, bis ein farbneutrales Objekt, ein *Hadron*, entstanden ist. Dieser Effekt heisst *confinement* und als Hadronen kommen Mesonen ($q\bar{q}$) und Baryonen (qqq) in Frage.

Man muss deshalb die starke Wechselwirkung der Quarks und Gluonen *innerhalb* der Hadronen untersuchen.

Die klassische Methode des Kern- und Teilchenphysikers besteht darin, ein Projektil (zum Beispiel Elektron, Myon oder Neutrino) mit Impuls k mit bekannten Eigenschaften und Wechselwirkungen in das zu untersuchende Objekt, zum Beispiel ein Proton, zu schießen. Analysiert werden die Eigenschaften des gestreuten Projektils, insbesondere der Streuwinkel θ und der Impuls des gestreuten Projektils k' . Man vergleicht den gemessenen Wirkungsquerschnitt mit

dem eines punktförmigen Objektes, den Unterschied nennt man den *Formfaktor* F :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{\text{point}} \cdot F(q^2) \quad (1)$$

Dabei ist $q = k' - k$ der 4er Vektor des Impulsübertrages. Es wird insbesondere

$$q^2 = (k - k')^2 = -4|k| \cdot |k'| \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2)$$

Von tiefunelastischer Streuung spricht man dann, wenn sich das Objekt beim Streuprozess zerlegt. Tiefunelastische Streuung wurde mit Hilfe von Elektronstrahlen an ruhenden Protonen (ruhende Targets aus flüssigem Wasserstoff) seit den 1960er Jahren untersucht. Später kamen Myonstrahlen dazu, die mit grösserer Energie zur Verfügung standen, und es wurden auch schwerere Kerne untersucht. Schliesslich wurde von 1992 bis 2007 am Elektron-Proton-Collider HERA in Hamburg die Struktur des Protons und die Eigenschaften der starken Wechselwirkung bei einer Schwerpunktsenergie von 320 GeV studiert.

Notation: Wir nennen p den 4er Impuls-Vektor eines Teilchens mit Ruhemasse m . Dabei ist $p = (p_0, \vec{p})$, wobei p_0 die Energie (auch E) und \vec{p} den normalen dreidimensionalen Impuls darstellt. Wir definieren $|p| := |\vec{p}|$, also der Betrag des normalen Impulses. Für Teilchen mit verschwindender Ruhemasse $m = 0$, gilt also $|p| = p_0$. Weiter gilt für jedes Teilchen $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$ und das Minkowskiprodukt $p \cdot q = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q}$. Ist zum Beispiel der Winkel zwischen \vec{p} und \vec{q} gerade θ und können die Ruhemassen vernachlässigt werden, so wird $p \cdot q = |p||q|(1 - \cos\theta)$. Mit Hilfe von trigonometrischer Identitäten wird daraus $p \cdot q = 2|p||q| \sin^2 \theta/2$.

1.1 Elastische Streuung

[Halz84], Kap 8.

Bleibt das untersuchte Objekt, zum Beispiel das Proton, im Endzustand intakt, spricht man von elastischer Streuung. Dann ist im Schwerpunktsystem $|k| = |k'|$. Dies ist auch fast das Ruhesystem des Objektes, falls dieses schwer genug ist. Statt θ verwendet man oft die lorentz-invariante Grösse $Q^2 := -q^2$ als charakteristische Zahl für den einzelnen Streuprozess. θ und Q^2 sind über Formel (2) miteinander verknüpft.

Der Formfaktor wird für ein statisches Objekt gerade die Fouriertransformation der Ladungsverteilung:

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} d^3x, \quad (3)$$

wobei für den sphärisch symmetrischen Fall $\rho = \rho(r)$ oft die Entwicklung

$$F(\vec{q}) = 1 - \frac{1}{6}|q|^2 \langle r^2 \rangle + \dots \quad (4)$$

verwendet wird. Damit kann man offensichtlich die Ausdehnung einer statischen Ladungsverteilung dadurch bestimmen, dass man den Wirkungsquerschnitt und damit den Formfaktor für verschiedene \vec{q} misst.

Die Streuformeln an Punktladungen eines Projektils ohne und mit Spin sind der Rutherford- und der Mottwirkungsquerschnitt. Das Streuzentrum besitzt in beiden Fällen noch keinen

Spin. Es wird nur t-Kanal Streuung in 1. Ordnung berücksichtigt, da wir annehmen, dass das Projektil und das untersuchte Objekt verschieden sind (also zum Beispiel keine $ee \rightarrow ee$ Streuung):

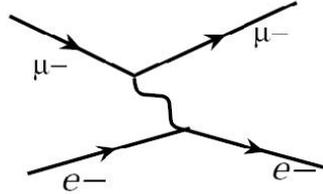
$$\text{kein Spin: Rutherford} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \right)_{\text{R}} = \frac{(2\alpha)^2 E^2}{q^4}, \quad (5)$$

$$\text{Elektron mit Spin: Mott} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{(2\alpha)^2 E^2}{q^4} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (6)$$

jeweils mit dem typischen Propagatorterm des Photons $1/q^2$ und der elektromagnetischen Kopplungskonstante α . Es bedeuten E die Energie des einfallenden Elektrons und $\beta = |k|/E$ dessen Geschwindigkeit. Man sieht, dass bei kleinen β der Spin des Elektrons keine Rolle spielt. Das ist plausibel, weil wir bisher nur elektrische Wechselwirkung haben. Der Spin wechselwirkt über das dazu gehörende magnetische Moment, dessen Effekte auf elektrische Ladungen von der Geschwindigkeit abhängen.

Im hochrelativistischen Fall ($\beta = 1$) wird der Klammerausdruck zu $\cos^2 \theta/2$. Dies ist ebenfalls plausibel, denn es entspricht der Regel, dass die Helizität für hochrelativistische Streuung erhalten bleibt, rückwärts gestreute Elektronen müssten aber die Helizität umdrehen. Dies wird durch den \cos^2 unterdrückt.

Betrachten wir nun als nächstes zwei hochrelativistische, unterscheidbare Fermionen, immer noch ohne Struktur ("punktförmig"), aber nun also beide mit Spin $1/2$, die aneinander streuen: (z.B. $e\mu \rightarrow e\mu$). Es kommt auch hier nur t-Kanalstreuung in Frage:



Durch Vernachlässigung der Massen wird in diesem Fall das Schwerpunktsystem sehr einfach. Es sind die einfallenden (ausfallenden) Impulse des Elektrons k (k') und des Myons p (p') alle vom gleichen Betrag $|k| = E$. Der durch das virtuelle Photon übertragene 4er Impuls nennen wir q . Im Schwerpunktsystem wird die Streuformel in 1. Ordnung Störungsrechnung in lorentzinvarianter Form zu

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \right)_{e\mu} = \frac{\alpha^2 s}{2q^4} \left(\frac{s^2 + u^2}{s^2} \right), \quad (7)$$

wobei die Spinsumme und der Flussfaktor in den Mandelstamvariablen ausgedrückt sind, die, zur Erinnerung, wie folgt definiert sind:

$$s = (k + p)^2 \approx 2k \cdot p \approx 4E^2 \quad (8)$$

$$t = (k - k')^2 \approx -2k \cdot k' \approx -2p \cdot p' \quad (9)$$

$$u = (k - p')^2 \approx -2k \cdot p' \approx -2k' \cdot p \quad (10)$$

somit $t = q^2$. Den Term in der Klammer in (7) kann man auch durch den Streuwinkel ausdrücken: Es ist $u = -2k' \cdot p = -s \cos^2(\theta/2)$ und somit

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{e\mu} = \frac{2\alpha^2 E^2}{q^4} (1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}) \quad (11)$$

Die beiden Terme in der Klammer haben eine einfache Veranschaulichung: Für den Fall, in dem die Helizitäten von e und μ gleich sind, ist der totale Spin null. Die Helizitätenregel ist immer erfüllt, die Winkelverteilung im Schwerpunktsystem deshalb isotrop. Sind die Helizitäten verschieden, so müsste bei grossen Streuwinkel ein Spinflip beider Teilchen erfolgen, (oder die Streuung erfolgt durch einen Drehimpulszustand, der verschieden von null ist.) Diese Situation wird durch den \cos^4 Term unterdrückt.

Streut man statt an einem Myon an einem Quark, so gilt exakt die gleiche Formel, nur dass man den einen Vertexfaktor noch mit e_q multiplizieren muss. Dieser Faktor stammt von der elektrischen Ladung des in Frage kommenden Quarks in Einheiten der Elementarladung, d.h. $e_q^2 = 1/9$ oder $4/9$.

Rechnet man das alles ins Ruhesystem des einen Teilchens mit Masse M um, erhält man ([Halz84], Kapitel 6.8):

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{e\mu} = \frac{(2\alpha)^2 E^2}{q^4} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (12)$$

Den ersten Term in der Summe nennt man auch den elektrischen, den zweiten Term den magnetischen Beitrag, weil der zweite Term auf Grund des Spins zustande kommt (vgl. (6), Mottformel). (Es gibt keinen offensichtlichen Zusammenhang der beiden Summanden mit den Summanden in der Formel (11).)

Nehmen wir nun wieder ein ausgedehntes Objekt als Target, zum Beispiel ein Proton, kommen Formfaktoren dazu. Man verwendet für die elektrischen und magnetischen Terme je einen getrennten Formfaktor und erhält für die Streuung eines Elektrons an einem Proton, im Ruhesystem des Protons:

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{ep} = \frac{(2\alpha)^2 E^2}{q^4} \left(G_E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{für} \quad |q|^2 \ll M^2, \quad (13)$$

wobei G_E der elektrische und G_M der magnetische Formfaktor genannt wird. Der elektrische Formfaktor ist für die Streuung unter kleinen Winkeln (Vorwärtsstreuung) und der magnetische für Streuung unter grossen Winkeln (Rückwärtsstreuung) zuständig.

Analysiert man die Formfaktoren aus den gemessenen Daten mit Hilfe von Formel (4), erhält man in beiden Fällen $\langle r \rangle = 0.8$ fm. Diese 0.8 fm werden als der "etablierte Radius" des Protons betrachtet.

Der Vollständigkeit halber folgt die korrekte Formel für alle q im Laborsystem des Protons, was sich für ein endlich schweres Proton vom Schwerpunktsystem unterscheidet (Rosenbluthformel). Es gilt

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{(\alpha)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{E'}{E} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (14)$$

mit der Energie des auslaufenden Elektrons

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{und} \quad \tau := -\frac{q^2}{4M^2} \quad (15)$$

Beachte, dass es im elastischen Streufall nur einen freien Parameter gibt, zum Beispiel der Streuwinkel θ oder besser Q^2 . Dann ist alles andere bestimmt, insbesondere E' .

1.2 Unelastische Streuung

Mit unelastischer Streuung ist allgemein gemeint, dass das Target (z.B. das Proton) sich beim Streuvorgang in mehrere Bruchteile zerlegt. Das setzt natürlich primär voraus, dass es sich überhaupt um ein zusammengesetztes Objekt handelt. Wir wollen vorerst möglichst wenig über die Natur des Zerlegungsvorganges annehmen. Man charakterisiert die Gesamtheit der Bruchstücke des Objektes mit ihrer invarianten Masse W . Es gilt die Energie- und Impulserhaltung

$$k' = k - q \quad W = \sqrt{(p+q)^2} \quad W^2 = M^2 + 2p \cdot q + q^2 \quad (16)$$

mit den 4er Impulsen k für das einlaufende Elektron mit vernachlässigter Masse, k' für das auslaufende Elektron, p für das einlaufende Proton mit Masse M und q für den 4er Impulsübertrag.

Mit dieser invarianten Masse W (auch Masse des hadronischen Endzustandes genannt) haben wir einen weiteren freien Parameter für den Streuprozess. Dieser ist jetzt also durch zwei Zahlen festgelegt, z.B. W und q^2 . Es gilt $W \geq M$. Im elastischen Fall, wenn das Proton intakt bleibt, ist $W = M$.

Es werden üblicherweise zwei lorentzinvariante dimensionslose Zahlen x und y definiert:

Als Mass für die Unelastizität wird die dimensionslose Grösse x oder manchmal ω eingeführt mit

$$\omega := \frac{1}{x} := 1 - \frac{W^2 - M^2}{q^2} = -\frac{2q \cdot p}{q^2} \quad (17)$$

Da $q^2 < 0$ und $W > M$ ist x immer kleiner 1. Die Grösse $q \cdot p$ ist immer positiv, wie man sich zum Beispiel durch Ausrechnen im Ruhesystem der Masse M überzeugen kann: $p \cdot q = M \cdot q_0$. Also ist $x > 0$ und somit

$$0 \leq x \leq 1. \quad (18)$$

Dabei bedeutet $x = 1$, dass $W^2 = M^2$, also der elastische Grenzfall mit $q^2 = -2p \cdot q$. Wie wir im nächsten Kapitel demonstrieren, ist x gerade der Bruchteil des Protonimpulses, der am Streuprozess teilnimmt.

Die Definition für y lautet

$$y := \frac{p \cdot q}{p \cdot k}. \quad (19)$$

Dies ist ein ähnlicher Ausdruck wie $1/x$, aber normiert (statt auf q^2) auf eine Grösse, die etwa der Schwerpunktennergie $s = (p+k)^2 = M^2 + 2p \cdot k$ entspricht. Setzt man $q = k - k'$ in die Definition ein, erhält man

$$y = 1 - \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} \approx 1 - \frac{|k'|}{|k|} \left(\frac{1 - \cos \Theta}{2} \right) = 1 - \frac{|k'|}{|k|} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (20)$$

wobei $\Theta = \pi - \theta$ der Winkel ist, den k' und p in einem gegebenen Bezugssystem einschliessen. Beachte, dass bei HERA in der Regel als Winkel des gestreuten Elektron Θ angegeben wird.

Die Formel gilt für $p, k \gg M$. Im Targetruhesystem, also $p = (M, 0, 0, 0)$, erhält man

$$y = 1 - \frac{|k'|}{|k|} \quad (21)$$

Die anschauliche Bedeutung von y ist also der relative Energieverlust des Elektrons bei der Streuung, gemessen im Ruhesystem des Protons.

Wenn man die beiden Definitionen für x und y miteinander multipliziert, erhält man den Zusammenhang ($Q^2 = -q^2$):

$$x \cdot y = \frac{Q^2}{s - M^2} \quad (22)$$

Man erkennt, dass in der Tat nur zwei der für den einzelnen Streuprozess relevanten lorentzinvarianten Parameter x, y, Q^2 voneinander unabhängig sind.

Elastische Streuung ergibt sich als Grenzfall für $x = 1$ und $y = \sin^2(\theta/2)$. Jetzt gibt es nur noch eine unabhängige Variable: y und Q^2 hängen über $Q^2 = y(s - M^2)$ zusammen. Damit kann man für die Elektron - Quark - Streuung aus Formel (11) nach Multiplikation mit der Quarkladung e_q^2 der folgende lorentzinvariante Ausdruck gewonnen werden, mit

$$dy = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (23)$$

$$dQ^2 = s \cdot dy \quad (24)$$

wird der Wirkungsquerschnitt in Funktion von y

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2 s}{q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2), \quad (25)$$

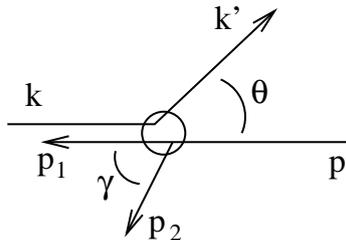
und in Funktion von Q^2

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial Q^2}\right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \quad (26)$$

jeweils für $s \gg M^2$.

1.3 Ein hypothetisches Beispiel zur Veranschaulichung von x

Das folgende hypothetische Beispiel soll das Wesen dieser Formalismen veranschaulichen. Wir nehmen den besonders einfachen Fall an, dass das zu untersuchende Objekt sich gerade in zwei Teile mit 4er Impulsen p_1 und p_2 zerlegt. Und zwar soll p_1 den Teil des Objektes darstellen, der an der Streuung nicht teilgenommen hat. p_1 läuft also in Richtung von p weiter. p_2 wird unter dem Winkel γ gestreut.



Es liegen alle Vektoren in einer Ebene. Es gilt folgende Energie- und Impulserhaltung:

$$p + k = p_1 + p_2 + k' \quad (27)$$

Das sind drei Gleichungen, da eine Raumkomponente trivialerweise null ist. Wir haben aber fünf Unbekannte, nämlich $|p_1|, |p_2|, \gamma, |k'|, \theta$. Es bleiben also tatsächlich wie behauptet zwei unabhängige Freiheitsgrade für den Prozess.

Die invariante Masse der beiden Teile wird dann:

$$W^2 = (p_1 + p_2)^2 = 4 |p_1| |p_2| \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (28)$$

wenn man die Massen der beiden Teile vernachlässigt.

Aus Impulserhaltungsgründen sind die transversalen Komponenten von p_2 und k' gleich. Wir suchen uns nun das Inertialsystem, das parallel zur Strahlrichtung der Protonen z laufen soll, und zwar so, dass $\gamma = \theta$. Darin muss demnach $\vec{k}' + \vec{p}_2 = 0$ und somit $|k'| = |p_2|$ gelten. Deshalb bleibt in der Impulsbilanz auf der Seite des Endzustandes nur p_1 übrig. Wir stellen die Impulsbilanz entlang der Strahlachse z auf:

$$|p| - |k| = |p_1| \quad (29)$$

Für den übertragenen Impuls q gilt

$$k' = k - q, \quad p_1 + p_2 = p + q \quad (30)$$

Wir rechnen das Quadrat des zweiten Ausdruckes in (30) aus und vernachlässigen alle Massen:

$$2p_1 \cdot p_2 = 2p \cdot q + q^2 \quad (31)$$

$$2|p_1||p_2|(1 - \cos \gamma) = q^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (32)$$

$$4|p_1||p_2| \sin^2 \frac{\gamma}{2} = -4|k||k'| \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (33)$$

$$|p_1| = -(|p| - |p_1|) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (34)$$

$$|p_1| = |p| \cdot (1 - x) \quad (35)$$

Das nicht abgelenkte Bruchstück p_1 trägt also gerade einen Bruchteil $1 - x$ des ursprünglichen Impulses p des Objektes mit. Der restliche Impulsanteil x hat an der Wechselwirkung teilgenommen.

x stellt den Bruchteil des Impulses des Protons dar, der an der Wechselwirkung teilnimmt.

Beachte, dass diese Interpretation an diesem Beispiel möglich ist, ohne dass irgendwelche Annahmen über ein Partonmodell oder gar eine Wechselwirkung im Proton gemacht werden.

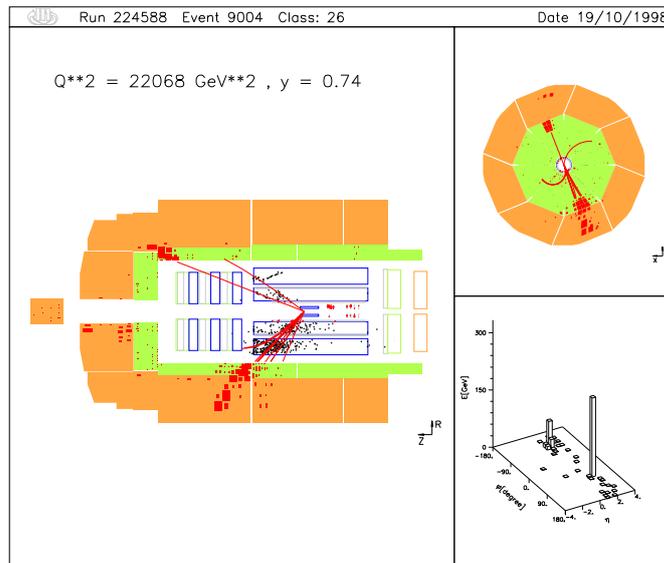


Abbildung 1: Tiefunelastisches Ereignis, gemessen mit H1 bei HERA. Links eine Seitenansicht (Protonen kommen von rechts, Elektronen von links), rechts oben eine Ansicht in Protonflugrichtung, rechts unten die im Detektor gemessenen Energien als Funktion der Winkel.

1.4 Ein Beispiel-Ereignis der tiefunelastischen Streuung

Die Abbildung 1 zeigt ein solches Ereignis, das mit dem Experiment H1 bei HERA am DESY in Hamburg gemessen wurde.

Das Elektron kam von links und wird in den oberen Teil des Detektors gestreut. Das Proton kam von rechts. Das gestreute Quark wird als jet im unteren Teil detektiert. Der Rest des Protons hadronisiert ebenfalls, fliegt aber im Strahlrohr weiter, sodass er nicht vollständig detektiert werden kann. Man kann aber einzelne Signale im Detektorteil links erkennen, die von der Hadronisierung des Protonrests herrühren.

Der H1-Detektor besteht wie die meisten Beschleunigerexperimente aus einem Aufbau von konzentrischen Detektoren. Von innen nach aussen werden folgende Detektorteile verwendet:

1. Der *Vertexdetektor* bestimmt den Ursprungsort der Spuren durch genauest mögliche Ortsauflösung, in der Regel mit Hilfe von Silizium-pixel-sensoren (kleine schwarze Rechtecke in der Abbildung 1).
2. Der *Trackingdetektor* (grosse schwarze Rechtecke) detektiert meist mit Hilfe von Ionisationsspuren in Gasen die Bahnen der geladenen Teilchen. Er befindet sich in einem Magnetfeld, sodass die Impulse und Ladungsvorzeichen der Detektoren bestimmt werden können, vergleiche auch mit Abbildung 2, rechts.
3. Das *Kalorimeter* (grün und gelb) detektiert Photonen, Elektronen und Teilchenjets, indem es diese vollständig abbremst. Die dabei entstehende totale Ionisationsladung (oder das Szintillationslicht) ist proportional zur Energie des Teilchenshowers.

4. Der *Muondetektor* befindet sich ausserhalb des Kalorimeters, das als Filter fuer alle anderen Teilchen dient. Mit Hilfe von Spurdetektoren in einem Magnetfeld werden die Muonen iudentifiziert und deren Impuls besonders genau bestimmt (siehe Abbildung 2).

In diesem Ereignis wurden aufgrund der gemessenen Energieen und Streuwinkel die kinematischen Parameter y und Q^2 bestimmt, woraus man nach (22) auch x bestimmen kann.

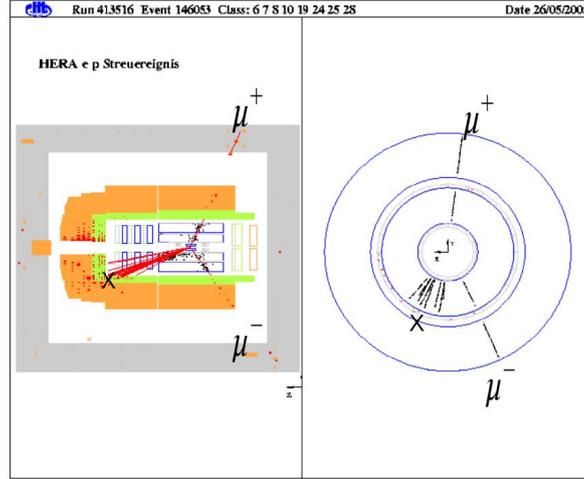


Abbildung 2: Ein Ereignis, bei dem zusätzlich zwei Muonen produziert wurden. Es ist schematisch auch das äussere Muonsystem dargestellt. Rechts sind die Teilchenspuren in der zentralen Spurkammer dargestellt,

2 Messung der Streuparameter bei HERA

Grundsätzlich stehen 4 Messgrössen zur Verfügung, um die zwei Parameter der Streuung zu bestimmen. Man bestimmt meist Q^2 und y und berechnet $x = Q^2/ys$ aus (22). Die Messgrössen sind: Energie E' und Winkel $\Theta = \pi - \theta$ des gestreuten Elektrons, totale hadronische Energie E_h und mittlerer hadronischer Winkel γ .

Die direkteste Methode, diese Streuparameter aus den experimentellen Werten zu bestimmen, besteht darin, nur die Daten des gestreuten Elektrons zu verwenden. Es wird dann $Q^2 = 2k \cdot k' = 4E_e E' \sin^2(\theta/2)$ und mit Formel (20) y bestimmt. Diese Methode heisst im Jargon die Elektronmethode. Sie ist relativ sicher bezüglich systematischer Fehler des schlechter kontrollierbaren Hadronenzustandes, hat aber den Nachteil, dass bei kleinen y ein Messfehler in der Energie E' sich stark auf die Genauigkeit von x auswirkt. Man bekommt folgende partielle Ableitungen ($E' = |k'|$) ([Felt87] mit $\theta = \pi - \Theta$):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial E'}\right)_{\theta=\text{konst.}} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dE'}{E'} \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial Q^2}{\partial Q^2}\right)_{\theta=\text{konst.}} = \frac{dE'}{E'} \quad (37)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_{E=\text{konst.}} = -\cot \frac{\theta}{2} \left(x \frac{|p|}{E_e} - 1\right) d\theta \quad (38)$$

$$\left(\frac{\partial Q^2}{Q^2}\right)_{E=\text{konst.}} = \cot \frac{\theta}{2} d\theta \quad (39)$$

$$(40)$$

Sowohl für experimentelle Überprüfungen der Energieeichungen als auch für das Studium von Prozessen bei kleinem y ist es sinnvoll, auch den Endzustand der hadronischen Bruchstücke mit einzubeziehen. Hier hat man aber mit verschiedenen Problemen zu kämpfen:

- Der Anteil des Endzustandes in Proton-Strahlrichtung trägt in der Regel relativ viel Impuls weg, der aber hauptsächlich innerhalb des Strahlrohres bleibt, und deshalb nicht messbar ist.
- Die Hadronisierung führt zu vielen Einzelteilchen, die u.U. dicht liegen und nicht einzeln gemessen werden können.
- Die Hadronisierung führt aber oft auch zu ausgedehnten Energieflüssen, wo in einem weiten Bereich des Detektors zum Teil sehr kleine Energien deponiert werden, die nahe dem elektronischen Detektorrauschen liegen.

Um die erste dieser Schwierigkeiten zu umgehen, verwendet man die Tatsache, dass die Grösse $\sum(E - p_z)$, also die Differenz zwischen totaler Energie und z Komponente des Impulses, eine Erhaltungsgrösse ist. Sie ersetzt die longitudinale Energieerhaltung, die in der Analyse von Daten von e^+e^- Collidern verwendet wird.

Man wählt die positive z -Achse in Richtung der einfallenden Protonen. Der Anfangszustand wird

$$(E - p_z)_{\text{Proton}} = 0 \quad (E - p_z)_{\text{Elektron}} = 2E_e \quad (41)$$

unter Vernachlässigung der Massen. Für den Endzustand gilt

$$(E - p_z)_{\text{Hadronen}} = \sum(E_h(1 - \cos \Theta_h)) \quad (E - p_z)_{\text{Elektron}'} = 2E' \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (42)$$

wo wieder $\theta = \pi - \Theta$. Die $E - p_z$ Bilanz lautet also

$$2E_e = \sum(E_h(1 - \cos \Theta_h)) + 2E' \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (43)$$

Mittels Division durch $2E_e$ erkennt man, dass offenbar der zweite Term gerade die Grösse $1 - y$ ist. y bestimmt also die Aufteilung der $E - p_z$ - Anteile auf die Hadronen und das gestreute Elektron. Grosses y , also Rückwärtsstreuung im Schwerpunktsystem, bedeutet viel $E - p_z$ im Hadron und wenig im Elektron. Kleines y , Vorwärtsstreuung, lässt das $E - p_z$ des Elektrons nur leicht verändert. Die Definition

$$y_h := \frac{\sum_{\text{had}}(E_h(1 - \cos \Theta_h))}{2E_e} =: \frac{\Sigma}{2E_e} \quad (44)$$

ist daher sinnvoll und erlaubt das y auch alleine aus dem hadronischen System zu gewinnen. Die Winkelabhängigkeit $1 - \cos \Theta = 2 \sin^2 \Theta/2$ unterdrückt dabei sehr effizient die Teilchen, die im Strahlrohr davonfliegen, allerdings nur in positiver z Richtung. Rückwärts bleibt das Problem (besonders bei Photondissoziation). Weiter braucht man für die Bestimmung von y_h die einzelnen Energiedepositionen im Kalorimeter nicht einzelnen Teilchen zuzuordnen (mittels

eines sogenannten “clustering” - Algorithmus), man muss nur einfach alle gemessenen Kanäle gewichtet mit $1 - \cos \Theta_h$ aufsummieren.

Manchmal wird die Bestimmung der Streuparameter dadurch falsch, dass eine nicht detektierte Bremsstrahlung des Anfangszustandes stattfindet: Das Elektron strahlt im äusseren elektrischen Feld des Protons noch schnell ein reelles Photon als Bremsstrahlung ab, bevor es in das Proton eindringt. Dies bedeutet eine effektive Reduktion von E_e und somit von s , die aber nicht bekannt ist. Die sogenannte Σ Methode umgeht dieses Problem, indem in den Definitionen $2E_e$ durch $\Sigma + 2E' \cos^2 \frac{\theta}{2}$ ersetzt wird. Man erhält

$$y_\Sigma = \frac{\Sigma}{\Sigma + 2E' \cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{und} \quad Q_\Sigma^2 = \frac{E'^2 \sin^2 \Theta}{1 - y_\Sigma}. \quad (45)$$

Damit können sinnvolle Messungen bis hinunter zu $y = 4 \times 10^{-3}$ gemacht werden.

Hauptsächlich um die Energieeichungen zu überprüfen, können die Streuparameter auch aus den Winkeln allein bestimmt werden. Dafür muss erst der hadronische Streuwinkel als ein mit den Energien gewichteter mittlerer Streuwinkel definiert werden, z.B. durch

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\Sigma}{P_{t,h}} \quad \text{mit} \quad P_{t,h} = \sum_{\text{had}} E_h \sin \Theta_h, \quad (46)$$

eine Definition, die ebenfalls versucht, das Problem der Verluste im Strahlrohr zu umgehen. Nach einigem Rechnen findet man die einfache Beziehung:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{y}{1 - y} \cdot \tan \frac{\Theta}{2} \quad (47)$$

was direkt erlaubt, die Elektronenergie aus den beiden Winkeln zu berechnen (siehe auch [Bent91]) und mit der direkt gemessenen Energie zu vergleichen. Wegen der energiegewichteten Definition des Winkels γ ist diese Methode aber nicht völlig unabhängig von lokalen Fehlern der Energieeichung.

Diese Definition von γ ist im übrigen konsistent mit dem Winkel γ im vorstehenden Beispiel. Er entspricht auch dem Streuwinkel des gestossenen Partons im Partonmodell (siehe später), wie in [Bent91] gezeigt wird.

3 Strukturfunktionen

3.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

Die klassische vollständige Beschreibung des Protonvertex geht davon aus, alle möglichen Terme für Kombinationen der relevanten Impulse p^μ (einfallendes Proton) und q^ν (Impulsübertrag durch das virtuelle Photon) zu berücksichtigen. Aus diversen Symmetrie- und Erhaltungssatzüberlegungen bleiben nur zwei solche Terme übrig, die mit den Faktoren W_1 und W_2 charakterisiert werden. Für Details siehe [Halz84], Kap. 8.3.

Da wir jetzt einen Prozess mit zwei unabhängigen Variablen beschreiben wollen, macht es also Sinn, einen doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt zu berechnen. Man erhält im Laborsystem:

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E' \partial \Omega} \right)_{\text{Lab}} = \frac{(\alpha)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \left(W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (48)$$

Vergleicht man das mit der Formel (14) für die elastische Streuung, kann man eine Analogie in der Winkelabhängigkeit feststellen: W_2 beschreibt die Vorwärtsstreuung wie der elektrische Formfaktor, W_1 die Rückwärtsstreuung wie der magnetische Formfaktor.

(Beachte aber, dass im Jargon bei HERA die Begriffe “vorwärts” und “rückwärts” sich auf die Protonrichtung beziehen, während in der in diesem Text verwendete klassische Streuformel-Beschreibung diese Bezeichnungen sich auf des streuende Lepton beziehen).

Eine lorentzinvariante Form dieser Formel bekommen wir durch Ersetzen der Ableitungen nach dE' und $d\Omega$ durch solche nach dx und dQ^2 unter Verwendung von (Protonruhesystem: $y = (E - E')/E$):

$$\nu := E - E' = y \cdot E, \quad x := \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (49)$$

$$dx|_{Q^2=\text{konst}} = d\frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{4EE'}{2M\nu} \cdot d\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2E'}{My} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (50)$$

$$dQ^2|_{x=\text{konst}} = xsdy = -xs \frac{y}{\nu} dE' \quad (51)$$

Man erhält daraus, ohne weitere Information zu verwenden, den Ausdruck [Ing87]:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4} (\nu W_2(1 - y) + 2MW_1 y^2 x) \quad (52)$$

Man definiert dann die *Strukturfunktionen* durch

$$F_2 = \nu W_2 \quad \text{und} \quad F_1 = 2MW_1 \quad (53)$$

und erhält damit einen völlig lorentzinvarianten Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt der unelastischen Streuung durch rein elektromagnetische Wechselwirkung:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4} (F_2(x, Q^2)(1 - y) + F_1(x, Q^2)y^2 x). \quad (54)$$

Die Strukturfunktionen sind im allgemeinen Fall natürlich ebenfalls von den Streuparametern abhängig.

3.2 Das Partonmodell

Wir wollen jetzt versuchen, Annahmen über die Bestandteile des Protons zu machen, die das streuende Lepton im Proton sieht. Das naive Partonmodell nimmt an, dass das Proton aus masselosen Fermionen, den Quarks, besteht, die sich alle parallel zum Protonimpuls bewegen. Die Streuung des Elektrons erfolgt dann nach Formel (25) an jeweils einem Quark, das vor

dem Stoss den Impuls $x \cdot p$ hat. Der Rest des Protons hat den Impuls $(1 - x) \cdot p$ und fliegt ungehindert geradeaus weiter, wie im obigen Beispiel beschrieben.

Die Wahrscheinlichkeit dW , ein Parton mit dem Impuls xp in der Intervallbreite dxp anzutreffen, sei $q(x) \cdot dx$. Die Funktionen $q(x)$ heissen Partondichten. Wir müssen nun den Wirkungsquerschnitt (26) noch mit dieser Wahrscheinlichkeit multiplizieren:

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} \right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \cdot q(x). \quad (55)$$

Natürlich kann unser elektromagnetischer Streuprozess genauso gut an einem Antiquark passieren, falls solche vorhanden sind. Wir können mit Hilfe der elektromagnetischen Wechselwirkung Quarks und Antiquarks nicht unterscheiden. Die Dichteverteilung der Antiquarks bezeichnet man mit $\bar{q}(x)$. Schliesslich erweitern wir aus Konventionsgründen den Ausdruck mit x :

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} \right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \cdot (xq(x) + x\bar{q}(x)) \quad (56)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (54) erhält man nun unmittelbar

$$\boxed{F_2 = e_q^2 \cdot (xq(x) + x\bar{q}(x)) = 2xF_1}. \quad (57)$$

Diese Gleichung heisst auch die ‘‘Master’’ - Gleichung des Partonmodells, die Gleichheit $F_2 = 2xF_1$ heisst die Callan-Gross-Relation. Insbesondere sind im Partonmodell die Strukturfunktionen nur von x und nicht von Q^2 abhängig. Diese Tatsache heisst Skalenverhalten (Bjorken scaling).

Hätten die Partonen Spin 0, müsste man für die Elektron-Parton-Streuung von der Mott-Streuformel ausgehen. Diese entspricht für hochrelativistische Elektronen der Formel (48) mit $W_1 = 0$, deshalb wäre dann $F_1 = 2MW_1 = 0$, aber der Ausdruck für F_2 ändert sich nicht. Die experimentelle Verifikation der Callan-Gross-Relation zeigt, dass die Partonen, die man elektromagnetisch sehen kann, tatsächlich Fermionen, also Spin-1/2-Teilchen, sind.

3.3 Skalenverletzung

Bei der Herleitung von (57) haben wir die Streuformel(25) benützt, welche wiederum unter der Annahme gewonnen wurde, dass die Quarkmassen vernachlässigt werden können, es wurde zum Beispiel $u := (k - p')^2 \approx -2k' \cdot p \approx s \cdot (y - 1)$ angenommen. Ein aus einem Gluon entstandenes, virtuelles Quark hat aber zweifellos eine signifikante Virtualität, das heisst $p^2 > 0$.

Ausserdem haben wir angenommen, dass der Partonimpuls parallel zum Protonimpuls liegt, der transversale Impuls also verschwindet. Deshalb konnten wir für die Beschreibung des Partonimpulses mit nur einer Zahl x auskommen. Für aus Gluonen fluktuierende Quarks ist dies aber offensichtlich nicht mehr richtig.

Man erwartet also nur dann ein Skalenverhalten der Strukturfunktionen, falls die Bestandteile des Proton aus punktförmigen, masselosen und reellen Fermionen besteht, die keine transversale Impulskomponente besitzen.

NOTE: THE FIGURES IN THIS SECTION ARE INTENDED TO SHOW THE REPRESENTATIVE DATA. THEY ARE NOT MEANT TO BE COMPLETE COMPILATIONS OF ALL THE WORLD'S RELIABLE DATA.

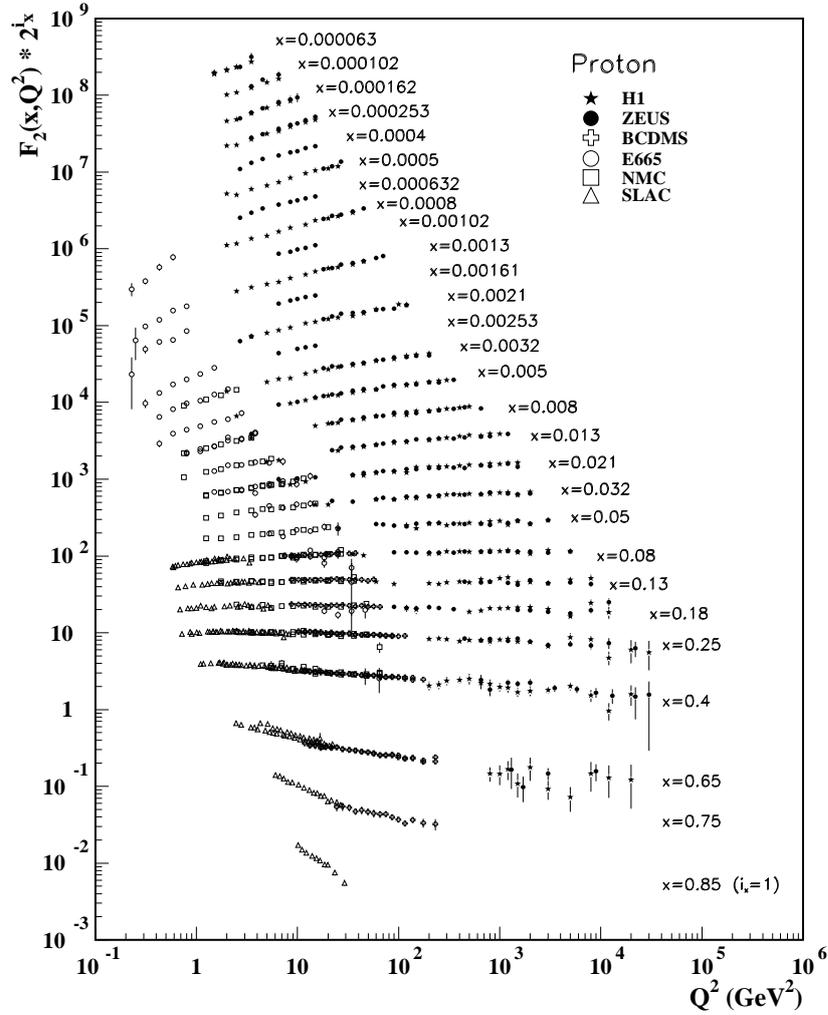


Figure 16.6: The proton structure function F_2^p measured in electromagnetic scattering of positrons on protons (collider experiments ZEUS and H1), in the kinematic domain of the HERA data, for $x > 0.00006$ (*cf.* Fig. 16.9 for data at smaller x and Q^2), and for electrons (SLAC) and muons (BCDMS, E665, NMC) on a fixed target. Statistical and systematic errors added in quadrature are shown. The data are plotted as a function of Q^2 in bins of fixed x . Some points have been slightly offset in Q^2 for clarity. The ZEUS binning in x is used in this plot; all other data are rebinned to the x values of the ZEUS data. For the purpose of plotting, F_2^p has been multiplied by 2^{i_x} , where i_x is the number of the x bin, ranging from $i_x = 1$ ($x = 0.85$) to $i_x = 28$ ($x = 0.000063$). References: **H1**—C. Adloff *et al.*, Eur. Phys. J. **C21**, 33 (2001); C. Adloff *et al.*, Eur. Phys. J. **C30**, 1 (2003); **ZEUS**—S. Chekanov *et al.*, Eur. Phys. J. **C21**, 443 (2001); S. Chekanov *et al.*, Phys. Rev. **D70**, 052001 (2004); **BCDMS**—A.C. Benvenuti *et al.*, Phys. Lett. **B223**, 485 (1989) (as given in [54]); **E665**—M.R. Adams *et al.*, Phys. Rev. **D54**, 3006 (1996); **NMC**—M. Arneodo *et al.*, Nucl. Phys. **B483**, 3 (1997); **SLAC**—L.W. Whitlow *et al.*, Phys. Lett. **B282**, 475 (1992).

Abbildung 3: Proton Strukturfunktion F_2 als Funktion von Q^2 . [PDG06]

Das Fallenlassen dieser Einschränkungen bewirkt in erster Linie, dass die Strukturfunktion F_2 auch von Q^2 abhängig wird, das Skalenverhalten also verletzt wird.

Die Abbildung 3 zeigt gemessene Funktionen $F_2(x, Q^2)$. Wegen der Skalenverletzung steigt die Strukturfunktion F_2 bei kleinen x an mit Q^2 , da dann mit der grösseren Virtualität des Austauschphotons mehr aus Gluonen entstandene virtuelle Quarkpaare gesehen werden. Bei grossem x sinkt die Strukturfunktion mit Q^2 , wo es immer wahrscheinlicher wird, dass das untersuchte Quark (bei grossem x meist ein Valenzquark) gerade ein Bremsstrahlungsgluon abgestrahlt hat, und somit ein kleineres x hat als eigentlich erwartet. Die Daten in Abbildung 3 zeigen tatsächlich ein solches Verhalten.

Das detaillierte Studium des Skalenverletzung erlaubt es also, die Effekte der starken Wechselwirkung zu studieren, und mit den Vorhersagen der Quantenchromodynamik zu vergleichen.

3.4 Die longitudinale Strukturfunktion

Wir erwarten auch eine Abweichung von der Callan-Gross-Relation. Wir definieren vorerst die sogenannte *longitudinale* Strukturfunktion F_L mit

$$F_L := F_2 - 2xF_1 \quad (58)$$

als Abweichung von der Callan-Gross-Relation und ersetzen damit F_1 in (54)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} (F_2(x, Q^2) \cdot (1 + (1 - y)^2) - F_L(x, Q^2) \cdot y^2). \quad (59)$$

An diesem Ausdruck erkennt man zweierlei: Erstens kann eine Abweichung vom Partonmodell in Form einer Verletzung der Callan-Gross-Relation nur bei grossen y festgestellt werden, das heisst im Schwerpunktsystem bei Rückwärtsstreuung oder im HERA-Laborsystem bei Ereignissen mit kleiner Elektronenergie $|k'|$ im Endzustand.

Zweitens kann man eine unabhängige Messung von F_L und F_2 nur dadurch erreichen, dass man y variiert und gleichzeitig x und Q^2 festhält, da beide Strukturfunktionen von den gleichen Variablen abhängen. Dies ist aber wegen $Q^2 = xys$ nur mittels Variation der Schwerpunktsenergie, also der HERA - Strahlenergie möglich. Deshalb wurden im Jahre 2007 am Schluss des HERA - Betriebes noch einige Daten mit reduzierter Strahlenergie genommen.

Natürlich kann man QCD-Modellvorhersagen von F_2 und F_L auch mit Formel (59) experimentell überprüfen, auch wenn alle Daten von der gleichen Strahlenergie kommen.

Die Bezeichnung “longitudinal” für F_L geht auf die Feststellung zurück, dass deren Beiträge zum Wirkungsquerschnitt nur durch longitudinal polarisierte Photonen (Helizität = 0) zustande kommen kann, siehe [Halz84], Seite 196. Reelle Photonen sind wegen deren verschwindenden Masse immer transversal polarisiert (Helizität = ± 1), für eine Messung von F_L soll man also nicht zu kleine Q^2 verwenden. Ausserdem verschwindet der Wirkungsquerschnitt von longitudinalen Photonen an masselosen Fermionen, wegen der Helizitätserhaltung. Man sieht also auch dadurch, dass F_L nur verschieden von null sein kann, wenn es nicht nur reelle Partonen, sondern auch virtuelle Quarks aus Gluonfluktuationen gibt. Eine Messung von F_L stellt also eine direkte Überprüfung der QCD dar.

3.5 Schwacher Geladener Strom: W Austausch

Elektronen wechselwirken nicht nur elektromagnetisch, sondern auch schwach. Mit dem Abschluss des LEP Forschungsprogrammes am CERN hat die Beschreibung der elektroschwache Wechselwirkung im Standardmodell eine hohe Genauigkeit und Sicherheit erreicht, sodass wir beruhigt auch schwache Wechselwirkung für das Studium der Struktur im Proton einsetzen können. Der einfachere Fall ist vorerst der W - Austausch, bei dem sich das Elektron in ein Neutrino verwandelt (oder umgekehrt bei Experimenten an Neutrinostrahlen), siehe Abbildung 4.

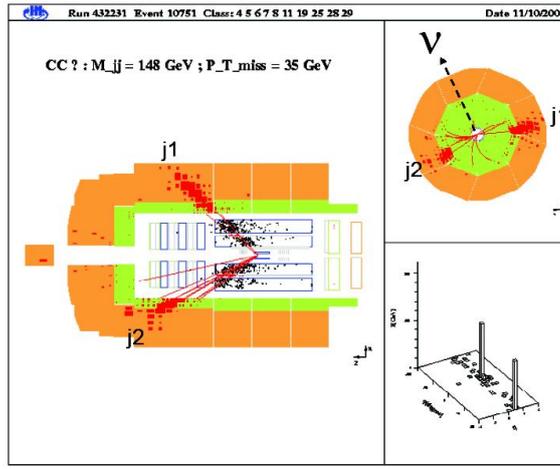


Abbildung 4: Tiefinelastisches Ereignis, gemessen mit H1 bei HERA. In der transversalen Ebene fehlt Impuls, ausserdem wurde kein gestreutes Elektron detektiert. Es handelt sich vermutlich um ein Ereignis, bei dem ein W - Boson ausgetauscht wurde, und das einfallende Elektron sich in ein Neutrino verwandelt hat. Der zweite jet könnte zum Beispiel durch Abstrahlen eines Gluons vom gestossenen Quark entstehen.

Gemäss den Feynmannregeln muss im Matrixelement der Photon - Propagator $1/Q^2$ durch den W -Boson-Propagator $1/(Q^2 + M_W^2)$ ersetzt werden. Die Vertexfaktoren betragen jeweils $g \cdot T_3/\sqrt{2}$, wobei $g = e/\sin \theta_W$ die schwache Kopplungskonstante und T_3 der schwache Isospin der einlaufenden Fermionen darstellt. Sehen wir einmal von T_3 ab, können wir analog zu (54) schreiben:

$$\frac{\partial^2 \sigma^{\text{CC}}}{\partial x \partial Q^2} = \frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{x(Q^2 + M_W^2)^2} (F_2^{\text{CC}}(x, Q^2)(1 - y) + F_1^{\text{CC}}(x, Q^2)y^2x \pm F_3^{\text{CC}}(x, Q^2)(y - \frac{y^2}{2})x) \quad (60)$$

Hier haben wir zusätzlich eine neue Strukturfunktion F_3 eingeführt, die der unterschiedlichen Kopplung der schwachen Wechselwirkung für Elektronen (oberes Vorzeichen) und Positronen Rechnung tragen soll. Deren Vorfaktor ist durch das Partonmodell motiviert, siehe unten.

Auf der Elektronenseite des W -Propagators kommen von den acht denkbaren Helizitäts- und Ladungskombinationen der Elektronen und Neutrinos nur die beiden Fälle $e_L^- \rightarrow \nu$ und $e_R^+ \rightarrow \bar{\nu}$ in Frage, sonst ist T_3 gleich null, oder die Helizitätsregel bzw. die Leptonzahl verletzt. Eine Messung des Wirkungsquerschnittes für den geladenen Strom für verschiedene Polarisierungen der Elektronen und Positronen zeigt tatsächlich die erwartete Abhängigkeit. (siehe Abbildung 5).

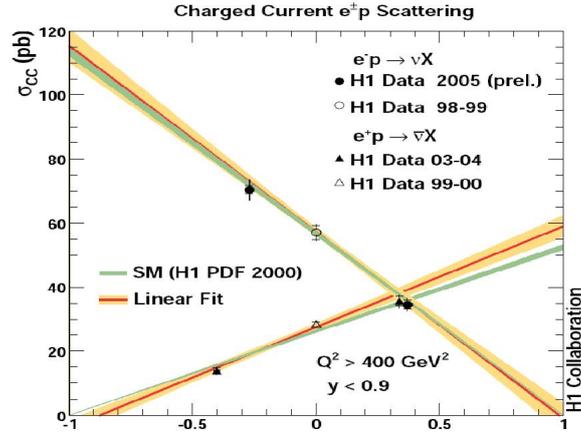


Abbildung 5: Der mit H1 gemessenes Wirkungsquerschnitt für geladener Strom als Funktion der Elektron, bzw. Positron - Polarisation (x -Achse). Ein Wert von 1 bedeutet 100% rechtshändige Polarisation, -1 100% linkshändige Polarisation. Ein Wert von 0 entspricht unpolarisierten Elektronen, also beide Helizitätszustände sind gleich wahrscheinlich.

Denken wir nun wieder im Partonmodell, und nehmen an, dass die Wechselwirkung im Proton drinnen an Quarks erfolgt. Auf der Quarkseite der W -Kopplung können dann nur linkshändige Quarks oder rechtshändige Antiquarks vorkommen. Um die Erhaltung der elektrischen Ladung nicht zu verletzen, kommen ausserdem nur gewisse Kombinationen von Quarkladungen vor. Die folgende Tabelle zeigt zur Erinnerung die Werte des schwachen Isospins der Isodupletts der Fermionen und ihrer Helizität. Alle anderen Fälle sind Singulett der schwachen Wechselwirkung und haben deswegen $T_3 = 0$.

T_3				
$+\frac{1}{2}$	ν	e_R^+	u_L	\bar{d}_R
$-\frac{1}{2}$	e_L^-	$\bar{\nu}$	d_L	\bar{u}_R

Schliesslich ergibt sich bei den Spinsummen für ungleiche Helizitäten von einlaufendem Quark und Elektron bzw. Positron ein Faktor $(1 - y)^2$, analog zum $\cos^4 \frac{\theta}{2}$ - Term in Gleichung (11), bzw. Gleichung (25).

Die folgende Tabelle fasst die Fälle zusammen, die einen von null verschiedenen Anteil am gesamten Wirkungsquerschnitt $eq \rightarrow \nu q'$ ergeben:

	Spin $\cdot T_3(e) \cdot T_3(q)$
$e_L^- u_L \rightarrow \nu d_L$	$(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})^2$
$e_R^+ \bar{u}_R \rightarrow \bar{\nu} \bar{d}_R$	$(\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2})^2$
$e_L^- \bar{d}_R \rightarrow \nu \bar{u}_R$	$(1 - y)^2 \cdot (-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})^2$
$e_R^+ d_L \rightarrow \bar{\nu} u_L$	$(1 - y)^2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2})^2$

Dabei stehen u für up, charm oder top Quarks, d für down, strange oder bottom Quarks. Auch wenn wir HERA mit unpolarisierten Elektronen füllen, können wir mit Hilfe der Analyse der y Abhängigkeit von $ep \rightarrow \nu X$ - Ereignissen die Quarkdichten $u(x)$ und $\bar{d}(x)$ getrennt untersuchen, für Positronen entsprechend $d(x)$ und $\bar{u}(x)$ (siehe auch [Ing87]).

Diese Faktoren müssen nun mit dem korrekten Vorfaktor entsprechend Gleichung (25) multipliziert werden, und man erhält so

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial Q^2}\right)_{eq\rightarrow\nu q'} = \frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{(Q^2 + M_W^2)^2} \cdot S \quad (61)$$

wobei für S der entsprechende Wert aus der obigen Tabelle einzusetzen ist.

Analog zum elektromagnetischen Fall multiplizieren wir diesen Ausdruck nun mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $q(x)$ der relevanten Quarks gemäss Tabelle und bilden den doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial Q^2}$.

Für die Summe der beiden Einträge in der Tabelle für e_L^- gilt die Identität

$$u(x) + (1-y)^2 \cdot \bar{d}(x) = \frac{1}{2} \left((1 + (1-y)^2)(u + \bar{d}) + 2(y - \frac{y^2}{2})(u - \bar{d}) \right) \quad (62)$$

Wir identifizieren nun die Strukturfunktionen durch Koeffizientenvergleich mit (60).

$$F_2^{e^- p \rightarrow \nu X} = 2xF_1^{\dots} = 2(xu(x) + x\bar{d}(x)) \quad \text{und} \quad F_3^{\dots} = 2(u(x) - \bar{d}(x)) \quad (63)$$

Für die Positronen führt das gleiche Prozedere zu

$$F_2^{e^+ p \rightarrow \bar{\nu} X} = 2xF_1^{\dots} = 2(xd(x) + x\bar{u}(x)) \quad \text{und} \quad F_3^{\dots} = 2(d(x) - \bar{u}(x)) \quad (64)$$

Die Strukturfunktionen sind also für die beiden Fälle verschieden, und natürlich auch verschieden vom elektromagnetischen Fall. Man analysiert also mit diesen Identifikationen besser gleich die Partondichten.

Will man alle vier Quarkdichten u, d, \bar{u}, \bar{d} separat extrahieren, muss man Daten für Positronen und Elektronen haben. Durch eine Analyse der y Abhängigkeit erhält man je F_3 und F_2 . Aus diesen vier Funktionen lassen sich dann die vier Quarkdichten bestimmen.

3.6 Schwacher Neutraler Strom: Z_0 Austausch

Streut man Elektronen an Protonen mit Energien, die den Bereich der Z -Boson-Masse von etwa 90 GeV erreichen oder überschreiten, muss zusätzlich zur früher diskutierten elektromagnetischen auch die schwache Wechselwirkung in Form neutraler Ströme berücksichtigt werden.

Gemäss den Feynmannregeln für Z_0 - Austausch muss im Matricelement der Photon-Propagator $1/Q^2$ durch den Z - Propagator $1/(Q^2 + M_W^2)$ ersetzt werden. Die Kopplung der Fermionen an das Z haben im Gegensatz zur Kopplung an die W sowohl links- als auch rechtshändige Anteile. Die Vertexfaktoren betragen generell

$$\frac{g}{2 \cos \theta_W} (c_V \pm c_A), \quad (65)$$

$$c_V = T_3 - 2q \sin^2 \theta_W \quad (66)$$

$$c_A = T_3 \quad (67)$$

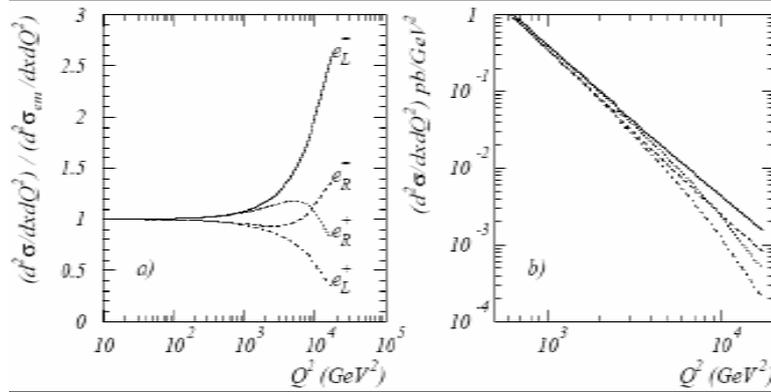


Abbildung 6: Die relativen (links) und absoluten (rechts) Anteile der vier Helizitäts- und Ladungskombinationen am Wirkungsquerschnitt. [Cash95].

wobei das obere Vorzeichen für linkshändige einlaufende Teilchen steht und q die elektrische Ladung des Fermions bedeutet. Falls die Streuung zwischen Lepton und Quark mit unterschiedlichen Helizitäten erfolgt, gibt es wieder einen zusätzlichen Faktor $(1 - y)^2$.

Schliessliche müssen wir berücksichtigen, dass es neben den rein elektromagnetischen und dem reinen Z Termen auch Interferenzterme gibt, die bei $Q^2 \approx M_Z^2$ den Wirkungsquerschnitt sogar dominieren.

Fassen wir alle Terme zusammen, wird mit

$$F_2 = A \cdot (xq(x) + x\bar{q}(x)) \quad F_3 = B \cdot (q(x) - \bar{q}(x)) \quad (68)$$

die Formel (59) ergänzt zum Wirkungsquerschnitt für neutrale elektroschwache Wechselwirkung am Proton

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} (F_2(x, Q^2) \cdot (1 + (1 - y)^2) - F_L(x, Q^2) \cdot y^2 + xF_3(x, Q^2) \cdot (1 - (1 - y)^2)). \quad (69)$$

Die Konstanten A und B hängen von den Vertexfaktoren und somit von Helizität und Ladungsvorzeichen der Quarks und Elektronen ab (siehe Abbildung 6), und sind zum Beispiel in [Ing87] zu finden.

Generell kann man aus den vier Datensätzen neutrale und geladene Ströme von Elektron- und Positronstrahl alle Quarkdichten einzeln extrahieren, allerdings nur bei hohen Q^2 , wo die Effekte der schwachen Wechselwirkung nicht im sonst dominierenden elektromagnetischen Teil untergehen.

4 Partondichten in der QCD

4.1 Generelle Aussagen

[Halz84] Kap 9.3. Wir wollen uns nun Gedanken machen, was es für die Strukturfunktionen, respektive die Quarkdichten bedeutet, wenn die Quarks im Proton der starken Wechselwirkung

unterliegen. Vorerst wollen wir Aussagen für die Quarkdichten machen, die nicht von einer speziellen Form der Wechselwirkung abhängen.

Die *Flavor-Summenregel* besagt, dass für das Proton gelten muss:

$$\int_0^1 (u(x) - \bar{u}(x))dx = 2 \quad (70)$$

$$\int_0^1 (d(x) - \bar{d}(x))dx = 1 \quad (71)$$

$$\int_0^1 (s(x) - \bar{s}(x))dx = 0 \quad (72)$$

$s(x)$ steht dabei für alle Quarksorten ausser u und d . Die Verteilungen $u - \bar{u}$ und $d - \bar{d}$ heissen auch Valenzquarkverteilung, der Rest der Quarkdichten nennt man die Seequarkverteilung.

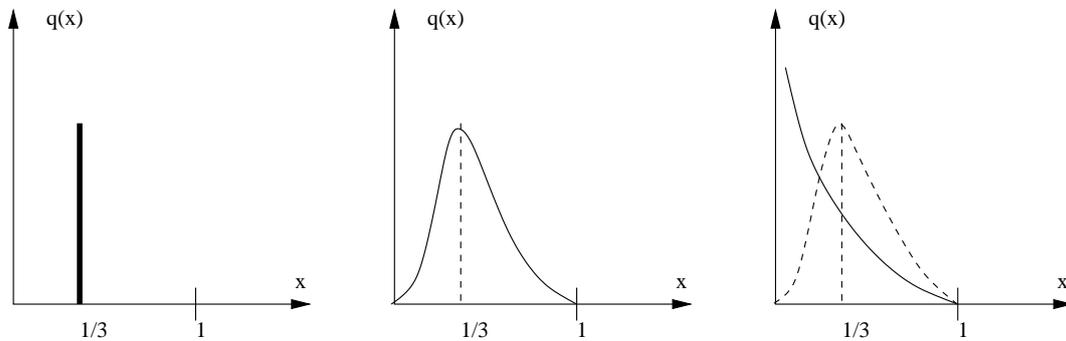


Abbildung 7: *Qualitative Eigenschaften der Partondichteverteilung $q(x)$ als Funktion von x . Links: Das Proton besteht aus drei Partonen, die nicht miteinander wechselwirken. Jedes Parton trägt einen Drittel des Impulses. Mitte: Drei Partonen, die miteinander wechselwirken, und damit eine mittlere Impulsverteilung erzeugen. Rechts: Zusätzlich werden virtuelle Partonen (Seequarks) generiert, umso wahrscheinlicher, je kleiner deren Impuls ist*

Wie sehen nun diese Dichteverteilungen aus? Vorerst stellen wir fest, dass für nicht wechselwirkende Quarks, $q(x)$ eine Deltafunktion bei $x = 1/3$ sein müsste (Abbildung 7 links). Eine Wechselwirkung wird die Dichte verschmieren (Abbildung 7 mitte). Für $x \rightarrow 1$ erwarten wir $q \rightarrow 0$. Je mehr Quarks es im Teilchen gibt, umso unwahrscheinlicher wird es, dass wir bei der Streuung eines mit grossem x treffen: Man setzt deshalb $(1 - x)^{2n-1}$, wo n für die Zahl der nicht beteiligten Quarks steht. Es ist für ein Proton also $n = 2$, was auch ungefähr gemessen wird.

Für $x \rightarrow 0$ erwarten wir für Valenzquarks ebenfalls $q(x) \rightarrow 0$ damit die Flavorsummenregel erfüllt bleibt.

Nimmt man zusätzlich an, dass Quarkpaare aus Gluonen virtuell erzeugt werden können, erhält man für $x \rightarrow 0$ ansteigende Seequarkdichten, da umso kleiner x ist, je wahrscheinlicher man ein virtuelles Quarkpaar findet (Abbildung 7 rechts). Dies wird von der QCD quantitativ vorausgesagt und im Experiment tatsächlich gemessen (siehe Abbildung 8).

Da wir x als Impulsbruchteil des Quarks definierten, müssen die mit x gewichteten Integrale der Dichten gerade den Gesamtimpuls des Protons ergeben:

$$\int_0^1 x \cdot (q(x) + \bar{q}(x))dx = 1 - \epsilon_g \quad (73)$$

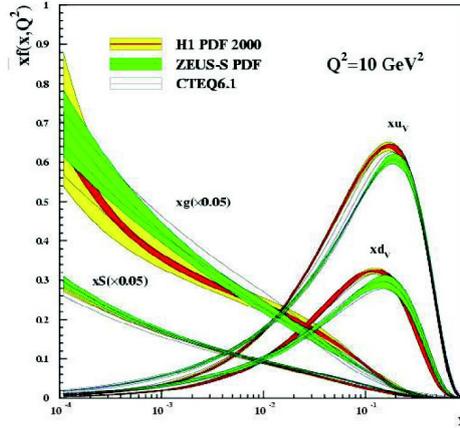


Abbildung 8: Bestimmung der Partondichtefunktionen mit Hilfe von Daten von HERA. xu_v und xd_v : Valenzquarkdichten. xg : Gluondichte. xS Seequarkdichte.

ϵ_g bezeichnet den Anteil des Impulses der von den Gluonen getragen wird. Experimentell wird $\epsilon_g = 0.43 \pm 0.02$ ([H1Low Q^2]), also fast die Hälfte des Protonimpulses.

Betrachten wir nun die Quarkdichten als Funktion von Q^2 : Bei kleinen x , wo wir vor allem Seequarks sehen, erwarten wir eine grössere Wahrscheinlichkeit für Quarks, je grösser deren Virtualität, also je grösser die Q^2 Skala und je kleiner der Abstand wird. Im Gegensatz dazu wird es bei grossen x für immer grössere Q^2 immer wahrscheinlicher, dass das Valenzquark gerade ein Gluon abgestrahlt hat, und deshalb bei x nicht mehr vorhanden ist. Diese allgemeinen Annahmen erlauben also bereits eine qualitative Erklärung der experimentell beobachteten Skalenverletzungen der Strukturfunktionen.

4.2 Altarelli - Parisi - Gleichungen

Die QCD beschreibt die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen. Dabei ist der Mechanismus sehr ähnlich wie bei der elektromagnetischen Wechselwirkung, wobei statt der elektrischen Ladung die QCD-Ladung ‐Farbe‐ für die Kopplungen verantwortlich ist. Es muss also jeweils α durch α_s ersetzt werden. Es bestehen aber zwei wesentlichen Unterschiede:

- Gluonen tragen im Gegensatz zu Photonen selbst Ladung, und können deshalb untereinander wechselwirken.
- Die Wechselwirkungskonstante α_s ist nur bei grossen Q^2 , also kleinen Abständen, klein genug, dass mit Hilfe von Störungsrechnung relevante Resultate erzielt werden können.

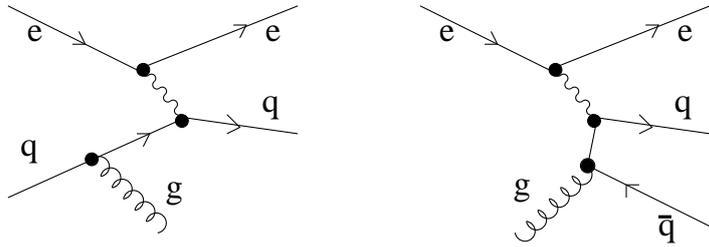
Die Abhängigkeit von α_s vom Q^2 des ankoppelnden Gluons wird in erster Ordnung

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad \text{mit} \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad (74)$$

Dabei bedeuten n_f die Zahl der Quarkflavors, die aufgrund ihrer Quarkmassen an den Prozessen teilnehmen können. Wegen dem confinement divergiert α_s bei kleinen Q^2 , statt wie in

der QED sinnvoll $\alpha(0)$ als fundamentale Wechselwirkungsgrösse zu verwenden, wird hier Λ als der eine fundamentale Parameter genommen, der die Wechselwirkungsstärke beschreibt. In höherer Ordnung entstehen weitere Terme $\log(Q^2/\Lambda^2)$, $\log \log(Q^2/\Lambda^2)$ usw., man nennt die erste Ordnung hier deshalb *leading log approximation* LLA. Die QCD Massenskala Λ ist von der Grössenordnung 200 MeV und markiert gewissermassen den Punkt, wo die Störungsrechnung definitiv vollständig versagen muss: Der obige Ausdruck wird für $Q^2 = \Lambda^2$ divergent.

In erster Ordnung α_s ergeben sich in der unelastischen Streuung zwei zusätzliche Grafen: Das gestreute Quark strahlt vor oder nach der elektromagnetischen Wechselwirkung ein Gluon ab (Abbildung links). Oder ein Gluon und das Photon könne gemeinsam ein $q\bar{q}$ - Paar erzeugen (Photon-Gluon-Fusion, rechts).



In beiden Fällen können also Ereignisse mit 2 jets entstehen. Die Photon-Gluon-Fusion kann auch schwerere Quarks erzeugen, also strange, charm oder bottom Quarks.

Die beiden Grafen (ohne das Elektron) können entsprechen den Compton-Grafen in der QED berechnet werden, wobei ein Photon durch ein Gluon ersetzt wird. Das heisst aus $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}$ wird $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha_s}$. Ausserdem muss man berücksichtigen, dass das einlaufende Photon die Virtualität $Q^2 \neq 0$ hat. Daraus erhält man ([Halz84], Seite 215)

$$\sigma(\gamma^* q \rightarrow qg) = \frac{2\pi\alpha e_q^2 \alpha_s}{s} \cdot P_{qq}(z) \log \frac{Q^2}{\mu^2} \quad (75)$$

Hier bedeutet die *Renormalisierungsskala* μ eine untere Abschneidegrenze des Integrals über alle q^2 ("Regularisierung") und

$$P_{qq} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1+z^2}{1-z} \quad z = \frac{x}{y}. \quad (76)$$

y ist der Impulsanteil den das Quark vor dem Stoss, x derjenige der das Quark nach dem Stoss hat. Die Splitting function $P_{qq}(z)$ ist anschaulich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Quark durch die Ausstrahlung eines Gluons seinen Impulsanteil um den Faktor z reduziert. Der Faktor $4/3$ stammt von der Mittelung über die verschiedenen Farbkombinationen.

Durch diesen Effekt wird nun der ursprüngliche Wirkungsquerschnitt, und damit die Strukturfunktion F_2 verändert. Und zwar müssen wir zusätzlich alle $q(y)$ mit $y > x$ berücksichtigen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit - also dem obigen Wirkungsquerschnitt - für die Gluonabstrahlung. Die Änderung gegenüber der Mastergleichung des Partonmodells beträgt gerade

$$F_2(x, Q^2) = \sum e_q^2 x(q(x) + \Delta q(x, Q^2)) \quad (77)$$

wobei über alle Quarks und Antiquarksorten summiert wird. Dabei ist

$$\Delta q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right). \quad (78)$$

Darin gibt es im Gegensatz zum Partonmodell nun eine Abhängigkeit von Q^2 . Diese wird meist als Ableitung nach $\log Q^2$ dargestellt:

$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (79)$$

Wir müssen nun aber auch den Photon - Gluon - Fusionsgraphen berücksichtigen. Das gibt mit dem gleichen Formalismus einen zusätzlichen Term $g(y) \cdot P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)$, wobei $P_{qg}(z)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass das Gluon ein $q\bar{q}$ Paar produziert, wobei das Quark den Impulsbruchteil z des ursprünglichen Gluons hat. P_{qg} muss also symmetrisch für z und $1 - z$ sein, es wird

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2}(z^2 + (1 - z)^2). \quad (80)$$

Auf die gleiche Weise kann man eine Differentialgleichung für die Gluondichte bekommen. Sie besteht aus zwei Summanden, einer für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Quark ein Gluon abstrahlt (Splitting function $P_{gq}(z) = P_{qg}(1 - z)$), und einer für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gluon von einem Gluon abgestrahlt wird (Splitting function $P_{gg}(z)$).

Die vollständige Gleichung für die Abhängigkeit ("Evolution") der Quark- und Gluondichten von Q^2 lauten in erster Ordnung ([Rob90], Seite 76):

$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y, Q^2) P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)] \quad (81)$$

$$\frac{dg(x, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q(y, Q^2) P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y, Q^2) P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right)] \quad (82)$$

Dies sind die Altarelli-Parisi Gleichungen (auch DGLAP genannt, von 1977), wobei hier alle Grafen erster Ordnung (LO) sind.

DGLAP beschreibt nur die Q^2 - Abhängigkeit der Partondichten. Deren x Abhängigkeit bei einem bestimmten Q_0^2 , $q_0(x)$, muss experimentell bestimmt werden. Kennt man $q_0(x)$, dann können daraus mit Hilfe von DGLAP die Partondichten $q(x, Q^2)$ bei allen Q^2 berechnet werden.

Im Proton bei sehr kleinen x sind die Valenzquarks fast ausgestorben. Hier dominieren das Gluonfeld und die daraus entstehenden virtuellen $q\bar{q}$ - Paare das Geschehen. In LO kann man in diesem Fall eine Abschätzung machen, wie sich die Gluondichte in Funktion von x verhält ([Rob90], Seite 112f.): Für $z \rightarrow 0$ wird $P_{gg} \rightarrow \frac{6}{z}$. Ausserdem lassen wir wegen der Dominanz von $g(x)$ die Partondichten qx in der DGLAP Gleichung weg. Es wird nach einiger Rechnung dann

$$xg(x) = e^{\sqrt{k \cdot \log T \log \frac{1}{x}}} \quad \text{mit} \quad T = \frac{\log \frac{Q^2}{\Lambda^2}}{\log \frac{Q_0^2}{\Lambda^2}}. \quad (83)$$

Die Quarkdichten $q(x)$ sind dann im wesentlichen proportional zu $dxg(x)/d \log(1/x)$. Studien an Daten ([Ball94]) bei $x = 10^{-3} \dots 10^{-4}$ bestätigen diese Zusammenhänge innerhalb der Fehler, was ein wichtiger Hinweis für die Richtigkeit der QCD-Beschreibung des starken

Kraftfeldes darstellt. Man spricht auch von *double asymptotic scaling* DAS. Das gilt allerdings nur für die erste Ordnung, in höherer Ordnung sind keine solchen analytischen Ausdrücke für Voraussagen bekannt.

Die Frage, bis zu wie kleinen Q^2 die DGLAP Näherungen in NLO die Daten noch gut beschreiben, hat in den letzten Jahren die Gemüter heftig bewegt. Erstaunlicherweise scheint bis hinunter zu $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ keine wesentliche Abweichung von der DGLAP Beschreibung zu beobachten zu sein. Da in diesem Bereich die Störungsrechnung wegen dem grossen α_s aber kaum mehr richtige Resultate liefern sollte, ist man geneigt zu glauben, dass die DGLAP Beschreibung bei kleinen Q^2 offenbar nicht sehr empfindlich auf solche Abweichungen ist.

4.3 Bestimmung der Gluondichte und Messung von α_s

Die Altarelli-Parisi Gleichungen (82) enthalten auch die Gluondichteverteilungen und das von Q^2 abhängige α_s . Durch Analyse der gemessenen tiefinelastischen Streudaten können deshalb nicht nur die Quardichteverteilungen (Abbildung 8), sondern auch die Gluonverteilungen bestimmt werden.

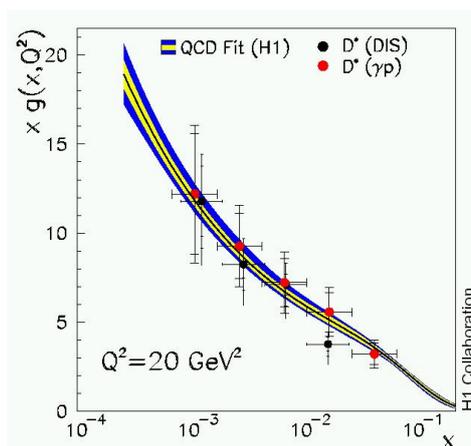


Abbildung 9: Bestimmung der Gluondichteverteilung mit der inklusiven Methode aus den DGLAP Gleichungen (ausgezogenes Band), verglichen mit Messungen der Gluondichte aus der Produktion von D-Mesonen aus HERA Daten

Abbildung 9 zeigt eine so bestimmte Gluondichteverteilung. Ebenfalls dargestellt ist eine andere Art, die Gluondichte zu bestimmen. Die Produktion von D Mesonen (Quarkinhalt $\bar{c}d$) geschieht durch Photon-Gluon-Fusion wie im vorigen Kapitel erläutert. Der Wirkungsquerschnitt hängt deshalb direkt von der Gluondichte ab, die damit aus der gemessenen Produktionsrate von D Mesonen bestimmt werden kann. Die Übereinstimmung dieser beiden völlig verschiedenen Messmethoden zeigt, dass die Gluondichteverteilung offenbar tatsächlich universelle Bedeutung hat.

Mit Hilfe einer globalen Anpassung an alle zur Verfügung stehenden Daten an die DGLAP Gleichungen lässt sich auch das $\alpha_s(Q^2)$ bestimmen.

Literatur

- [Halz84] F. Halzen, A. D. Martin: *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley, 1984.
- [Felt87] J. Feltesse: *Measurement of Inclusive Differential Cross Sections*, in Proceedings of the HERA Workshop, edited by R.D. Peccei, Hamburg 1987. Vol. 1, page 33.
- [Ing87] G. Ingelmann et al.: *Deep Inelastic Physics and Simulation*, in Proceedings of the HERA Workshop, edited by R.D. Peccei, Hamburg 1987. Vol. 1, page 3.
- [Bent91] S. Bentvelsen et al., in *Physics at HERA*, Proc. edited by W. Buchmüller and G. Ingelmann, Hamburg 1991, Vol. 1, page 23.
- [Cash95] R. J. Cashmore et al. in *Future Physics at HERA* Proc. edited by G. Ingelmann et al., Hamburg 1995, Vol 1, page 170.
- [H1LowQ²] H1 Kollaboration, *Deep inelastic inclusive ep scattering at low x and a determination of alpha(s)*, Eur.Phys.J.C21:33-61,2001.
- [Rob90] R. G. Roberts: *The structure of the proton*, Cambridge Monographs, 1990.
- [Ball94] R. D. Ball and S. Forte, *Double Asymptotic Scaling At Hera*, Phys. Lett. B **335** (1994) 77 [arXiv:hep-ph/9405320].
- [PDG06] Particle Data Group: *Review of Particle Physics*, W.-M. Yao et al., J. Phys. G **33**, 1 (2006), Aktualisierte Informationen auf <http://pdg.web.cern.ch/pdg/>