

Physik–Institut der Universität Zürich

Anleitung zum VP–Zeeman–Versuch

Inhaltsverzeichnis

1	\mathbf{Ein}	führung	5
	1.1	Ziel des Versuches	5
	1.2	Überlegungen zum Experiment	5
	1.3	Dipolübergänge	6
	1.4	Elektronenkonfiguration des Neon–Atoms $\binom{20}{10}$ Ne) $\ldots \ldots \ldots$	7
2	Exp	periment	9
	2.1^{-1}	Versuchsanordnung	9
		2.1.1 Direkte Winkelmessung	9
		2.1.2 Methode der gleichmässigen Verteilung	10
\mathbf{A}	Die	Lummer-Gehrcke-Platte	12
в	Mag	gnetfeldmessung	15
С	App	parategrössen	16
$\mathbf{Li}^{\mathbf{r}}$	terat	ur	18

1 Einführung

1.1 Ziel des Versuches

Der Zeeman-Effekt, d.h. die Aufspaltung von Spektrallinien durch ein Magnetfeld wird anhand von zwei Dipolübergängen in Neon nachgewiesen. Aus den zwei gemessenen Aufspaltungen werden die zwei Landé'schen g-Faktoren bestimmt.

1.2 Überlegungen zum Experiment

Die Elektronenhülle eines Atoms besitzt einen Gesamtdrehimpuls \vec{J} und damit im zeitlichen Mittel parallel dazu ein resultierendes magnetisches Moment

$$\vec{\mu}_J = -g_J \,\mu_B \,\frac{\vec{J}}{\hbar},\tag{1}$$

mit dem Bohr'schen Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ und dem sog. Landé'schen g-Faktor g_J . Die Hülle des Atoms besitzt somit in einem Magnetfeld \vec{B} eine zusätzliche Energie:

$$E = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B} = g_J \mu_B \frac{\vec{J}}{\hbar} \cdot \vec{B}.$$
 (2)

Die Energieniveaus der Atomhülle spalten auf und diese Aufspaltung hängt von g_J ab, wobei g_J für jedes Energieniveau anders sein kann. Die Projektion von \vec{J} auf die Quantisierungsachse (B-Achse, z-Achse) beträgt $m_J\hbar$, wobei m_J die Zahlenwerte 2J + 1 Werte $-J, -J + 1, \dots, J - 1, J$ annehmen kann. (!!! J ist hier, wie üblich, als Quantenzahl verstanden, d.h. als Maximal-z-Komponente von \vec{J} in Einheiten von \hbar). Es ist also,

$$E = g_J \mu_B m_J B. \tag{3}$$

Im Experiment werden zwei Dipolübergänge zwischen je zwei angeregten Zuständen von Neon untersucht, da Übergänge zum Grundzustand nicht im sichtbaren Spektralbereich liegen. Beide Übergänge führen von einem Zustand mit J = 0 zu einem mit J = 1; sie sind für dieses Experiment speziell aus dem sichtbaren Neon-Spektrum ausgewählt um die Verhältnisse etwas zu vereinfachen! Die zugehörigen Spektrallinien, gelb bezw. blau-grün, werden beobachtet. Im Magnetfeld spalten nun die Energieniveaus der beiden Zustände mit J = 1 auf. Pro Übergang ergeben sich statt einer nun je drei Spektrallinien, eine unverschobene und zwei verschobene.

Das Licht der unverschobenen Spektrallinien ist linear (π) , dasjenige der verschobenen zirkular (σ^+, σ^-) polarisiert (klassische Erklärung siehe Mayer-Kuckuk, Abschnitt 6.2). Diese Tatsache lässt sich zum Unterscheiden der verschobenen, bzw. unverschobenen Linien ausnützen. Mit Hilfe eines Interferenz–Spektrometers (Lummer–Gehrcke Platte, Beschreibung siehe Anhang A) werden die Frequenzen der Spektrallinien ausgemessen und daraus die Energieaufspaltung bestimmt.

$$\Delta E = h \,\Delta \nu = g_J \mu_B B \,\Delta m_J. \tag{4}$$



Abbildung 1: Energieniveau-Schema

Mittels einer Flip–Spule wird das Magnetfeld ermittelt und schliesslich der Landé'schen g–Faktor errechnet, gemäss

$$g_J = \frac{h \,\Delta\nu}{\mu_B B \,\Delta m_J},\tag{5}$$

wobei in unserem Fall für die verschobenen Linien $\Delta m_J = 1$ ist.

1.3 Dipolübergänge

Für elektrische Dipolübergänge (E1-Übergänge) gibt es bestimmte Auswahlregeln. Sie werden im folgenden nicht hergeleitet, sondern nur durch einige Überlegungen plausibel gemacht.

Aus zeitabhängiger Störungsrechnung erhält man für die Wahrscheinlichkeit eines E1-Übergangs zwischen Anfangs- und Endzustand

$$W = const. \left| \langle \psi_f | \widehat{E1} | \psi_i \rangle \right|^2 = const. \left| \langle \psi_f | e\vec{r} | \psi_i \rangle \right|^2,$$

mit den Wellenfunktionen ψ_i, ψ_f der Form $R(r)P_l^{m_l}(\cos\theta)e^{im_l\phi}$ $[P_l^{m_l}(\cos\theta),$ sind die Legendre - Polynome].

Damit $W \neq 0$, müssen die folgenden Auswahlregeln erfüllt sein:

• $\Delta J = 0, \pm 1$:

Da emitierte Lichtquanten immer den Drehimpuls $\vec{1}$ forttragen (in Einheiten von \hbar), folgt dies aus dem Drallsatz; $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{1}$, also $\Delta J = 0, \pm 1$. Überdies sind Übergänge von J = 0 nach J = 0 unerlaubt.

• $\Delta l = \pm 1$:

Dies folgt aus der Θ -Integration. Je nach Parität von l sind die Legendre-Polynome und damit auch die $\psi's$ gerade oder ungerade Funktionen. Das Resultat der Θ -Integration ist nur $\neq 0$, wenn ψ_i, ψ_f verschiedene Parität haben.

• $\Delta m_l = 0, \pm 1$:

Dies fogt aus der Integration über ϕ -abhängigen Teile und zwar mit verschiedenem Ergebnis für die einzelnen Komponenten von $\vec{r} < |z| \ge 0$ bedingt $\Delta m_l = 0$ und $< |x| \ge 0$, $< |y| \ge 0$ erzwingen $\Delta m_l = \pm 1$.

- $\Delta m_s = 0$: Dies muss gelten, da der Operator $e\vec{r}$ keine Spinabhängigkeit enthält.
- $\Delta m_J = 0, \pm 1$: m_J ist die Projektion von \vec{J} auf die Quantisierungsachse. Es gilt $m_{J_{i,f}} = m_{l_{i,f}} + m_{s_{i,f}},$ d.h. $m_{J_f} - m_{J_i} = \Delta m_J = \Delta m_l + \Delta m_s = \Delta m_l = 0, \pm 1.$

1.4 Elektronenkonfiguration des Neon–Atoms (²⁰₁₀Ne)

Die Elektronenkonfiguration des Grundzustandes von Neon ist

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^6$$

Lichtquanten von Übergängen in diesen Grundzustand haben eine zu hohe Energie und liegen nicht im sichtbaren Bereich des Spektrums. Im Experiment werden Übergänge zwischen zwei angeregten Zuständen beobachtet, nämlich vom Zustand (J = 0) mit der Elektronenkonfiguration

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^5(3p)^1$$

zum Zustand (J = 1) mit der Elektronenkonfiguration

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^5(3s)^1.$$

Die drei inneren Schalen sind voll (abgeschlossen) und geben keinen Beitrag zu \vec{J} . Der $(2p)^5$ –Schale fehlt ein Elektron. Wir können dies als ein Lochelektron betrachten (bzw. Spin gleiche Eigenschaften wie ein Elektron) und schreiben symbolisch $(2p)^{-1}$ statt $(2p)^5$. Damit haben wir unser Mehrelektronensystem auf ein Zweielektronenproblem reduziert und beschreiben die beiden Elektronenkonfigurationen mit

$$(2p)^{-1}(3s)^1.$$

 $(2p)^{-1}(3p)^1$

Aufgabe 1: Man berechne die möglichen Werte von J für die Konfiguration $(2p)^{-1}(3s)^1$ und zwar je für den Fall von

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l_i}; \quad \vec{S} = \sum_i \vec{s_i}; \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

und j-j-Kopplung:

$$\vec{j_i} = \vec{l_i} + \vec{s_i}; \quad \vec{J} = \sum_i \vec{j_i}.$$

Aufgabe 2: Nun sollen für die in Aufgabe 1 ermittelten Resultate mit J = 1 die möglichen Werte von g_J berechnet werden und zwar wieder für beide Fälle, L-S-Kopplung und j-j-Kopplung. Man beachte, dass J = 1 auf verschiedene Arten erhalten wurde und daher nun mehrere Werte für $g_{J=1}$ erhalten werden.

Bei L-S-Kopplung (siehe z.B. quantenmechanische Behandlung des Zeeman-Effekts in Mayer-Kuckuk, Abschnitt 6.2) setzt man die verschiedenen Kombinationen von L, S und J ein in

$$g_J = 1 + \frac{\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2}{2\vec{J}^2}.$$
 (6)

Bei j-j-Kopplung addieren sich die Momente beider Elektronen.

$$\vec{\mu}_J = \sum_{i=1}^2 \vec{\mu_i}, \qquad \qquad \vec{\mu_i} = g_{j_i} \vec{j_i} \mu_B$$

Mit dem Cosinussatz erhält man:



Abbildung 2:

Dabei werden g_{j_1} und g_{j_2} analog zu Gleichung(6) ermittelt, indem überall die möglichen Kombinationen von $\vec{j_i}, \vec{l_i}, \vec{s_i}$ aus der vorherigen Aufgabe eingesetzt werden.

2 Experiment

2.1 Versuchsanordnung



Abbildung 3: Übersicht über die Apparatur

Die Feldstärke des Elektromagneten stellt man mit einem Potentiometer am Magnetstrom–Speisegerät ein. Die Neonröhre ist möglichst genau in der Mitte der Magnetpolschuhe positioniert. Die Sammellinse fokussiert das Licht der Leuchtsäule der Neonröhre auf den Eintrittsspalt des Kollimators, welcher ein Bündel paralleler Lichtstrahlen erzeugt. Durch den Polarisationsfilter wird das Licht der verschobenen, bzw. unverschobenen Spektrallinien gemäss ihrer unterschiedlichen Polarisation ausgewählt. Im Lummer-Spektrometer wird das Licht der Neonröhre mit Hilfe eines drehbaren Prismas in die einzelnen Spektralfarben vorzerlegt und durch Drehen werden nur die Strahlen der gewünschten Linien (gelb, blaugrün) in die anschliessende Lummer-Platte (Beschreibung siehe Anhang A) weitergeleitet. Die aus der Lummerplatte links bzw. rechts austretenden Lichtwellen werden durch die Eintrittslinse des schwenkbaren Fernrohrs zur Interferenz gebracht. Mit einer Mikrometerschraube wird das Fernrohr geschwenkt und so mit dem Faden des Fernrohrokulars links und rechts der Lummerplatte die Winkel einzelner Ordungen der Beugungsmaxima von unverschobenen bzw. verschobenen Spektrallinien ausgemessen.

2.1.1 Direkte Winkelmessung

Die Interferenzmuster links und rechts des Schattens der Lummerplatte sind spiegelsymmetrisch. Der Beugungswinkel der beobachteten Ordnung kann daher einfach aus dem gemessenen Abstand A der zwei entsprechenden Linien und der gegebenen Distanz S vom Drehpunkt des Fernrohrs zum Auflagepunkt der



Abbildung 4: Das beobachtete Interferenzmuster bei einem bestimmten festen Magnetfeld

Mikrometrerschraube ermittelt werden:

$$\Theta = \arctan(\frac{A}{2S}).$$

Für das eingestellte Magnetfeld wird die Zeemanaufspaltung an den innersten vier Ordnungen bestimmt. Die einzelnen Linien sollen links und rechts mehrmals ausgemessen werden. Vorerst werden ihre Ordnungszahlen aus den Winkelmessungen der entsprechenden unverschobenen Linien ermittelt, gemäss Gleichung (7) im Anhang A. Dann misst man die Winkelwerte der verschobenen Linien für diese vier Ordnungen und setzt die erhaltenen Grössen in die Beziehung für $\Delta\nu$ (Gleichung (9) im Anhang A) ein, und bestimmt daraus die g-Werte gemäss Gleichung (5). Die einzelnen Winkelmessungen sollen mehrmals (mindestens 4 bis 5 mal) durchgeführt werden, um den statistischen Fehler abschätzen zu können.

2.1.2 Methode der gleichmässigen Verteilung

Mit dieser Methode ist es möglich ohne jegliche fehlerbehafteten Winkelmessungen auszukommen. Die unverschobenen Linien werden mit Hilfe des Polarisationsfilters ausgeblendet und das Magnetfeld am Potentiometer so eingestellt, dass man die beobachteten Linien nicht mehr eindeutig einer bestimmten Ordnung zuordnen kann. Dabei ist zu beachten, dass diese Potentiometereinstellung immer vom Maximalfeld ausgehend erreicht wird, um so Hystereseeffekte des Magneten zu vermeiden. Da dies der einzige Messvorgang ist, kann er im Prinzip beliebig oft wiederholt und so der statistische Fehler stetig verkleinert werden. Der zugehörige Feldwert wird aus einer vorgängig oder nachträglich durchzuführenden Feldeichung (Feldstärke als Fkt. der Potentiometerskalenteile) abgelesen.

Die Spektrallinien haben nun Abstände, die gerade einem halben Ordnungszuwachs entsprechen. Man drückt die Position der verschobenen Linien als Funk-



Abbildung 5: Gleichmässig verteiltes Interferenzmuster

tion von (nun gebrochenen) Ordnungen aus (Beziehung (8) im Anhang A):

$$\sin^2 \theta_M = \left(\frac{M\lambda_0}{2d}\right)^2 - n^2 + 1$$

Die folgende Berechnung der Verschiebung $\Delta \nu$ könnte bei irgend einer Ordnung erfolgen; wir rechnen der Einfachheit halber bei der innerste Ordnung M_0 . Um diese ohne Winkelmessung zu bestimmen, setzt man in obiger Gleichung $\theta = 0$ und erhält

$$M_0 = \frac{2d}{\lambda_0}\sqrt{n^2 - 1}.$$

Für die verschobenen Linien bei M_0 gilt jetzt

$$M = M_0 \pm \frac{1}{4},$$

und damit ergibt sich

$$\sin^2 \theta_{M+\frac{1}{4}} - \sin^2 \theta_{M-\frac{1}{4}} = \left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2 M_0.$$

Dies für den Zähler der Gleichung (9) im Anhang A eingesetzt führt auf das Resultat

$$\Delta \nu = -\frac{c}{4} \frac{1}{\lambda_0 M_0 - \frac{4n_0 d^2}{M_0} \left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0}}$$

und schliesslich mit Gleichung (5) auf den gesuchten g-Wert.

A Die Lummer-Gehrcke-Platte

Die Lummerplatte ist eine exakt planparallel geschliffene Glasplatte. Sie lässt sich für spektroskopische Messungen mit sehr hoher Auflösung verwenden. Allerdings erfordert sie eine Vorzerlegung des Lichtes (z.B. durch ein Prisma), weil sie auf einmal nur einen kleinen Spektralbereich verarbeiten kann. Das Licht fällt geeignet ein, so dass der Strahl innerhalb der Platte hin und her reflektiert wird unter einem Winkel α , der nur wenig kleiner als der Grenzwinkel für Totalreflexion ist. Somit treten links und rechts der Platte Strahlen streifend aus. Die Intensität des in der Platte verbleibenden Lichtstrahls wird dabei immer schwächer.



Abbildung 6: Lummerplatte

Die austretenden Strahlen, die grosse Gangunterschiede aufweisen, werden anschliessend durch eine Linse vereinigt und ergeben Interferenzmaxima in ihrer Brennebene. Wenn $n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ der Brechungsindex der Platte ist, beträgt die optische Wegdifferenz zweier benachbarter Strahlen

$$\delta = 2n\frac{d}{\cos\alpha} - 2d\tan\alpha\sin\beta = 2nd\cos\alpha = 2dn\sqrt{1 - \frac{\sin^2\beta}{n^2}}$$
$$= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\beta} = 2d\sqrt{n^2 - \cos^2\theta} = 2d\sqrt{n^2 - 1 + \sin^2\theta}.$$

Hauptmaxima in der Intensität ergeben sich unter jenen Winkeln θ_M , bei denen je zwei der austretenden Strahlen als optische Gangdifferenz gerade ein ganzes Vielfaches M der Wellenlänge haben: $\delta = M\lambda$. M ist die Ordnungszahl des Hauptmaximums. Für eine bestimmte Wellenlänge λ gilt nun:

$$M = \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n^2 - 1 + \sin^2 \theta_M^\lambda}.$$
 (7)

Mit dieser Beziehung kann die Ordnung ${\cal M}$ eines Haupmaximums bestimmt werden.

Aufgelöst nach $\sin^2\theta^\lambda_M$ lautet diese Gleichung

$$\sin^2 \theta_M^{\lambda} = \left(\frac{M\lambda}{2d}\right)^2 - n^2 + 1 \tag{8}$$

Für kleine Abweichungen $\pm \Delta \lambda$ von λ_0 , wie sie für die verschobenen Linien in unserem Experiment vorliegen, ergibt eine Taylor-Entwicklung

$$\sin^2 \theta_M^{\lambda_0 + \Delta \lambda} = \left(\frac{M\lambda_0}{2d}\right)^2 - n_0^2 + 1 + \frac{M^2\lambda_0}{2d^2}\Delta\lambda - 2n_0 \left.\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_0} \Delta\lambda$$
$$\sin^2 \theta_M^{\lambda_0 - \Delta \lambda} = \left(\frac{M\lambda_0}{2d}\right)^2 - n_0^2 + 1 - \frac{M^2\lambda_0}{2d^2}\Delta\lambda + 2n_0 \left.\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_0} \Delta\lambda$$

Durch die Subtraktion dieser beiden Gleichungen und Auflösung nach $\Delta\lambda$ folgt:

$$\Delta \lambda = \frac{\sin^2 \theta_M^{\lambda_0 + \Delta \lambda} - \sin^2 \theta_M^{\lambda_0 - \Delta \lambda}}{\frac{\lambda_0 M^2}{d^2} - 4n_0 \left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0}}$$

Mit

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \qquad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda, \qquad \Delta \nu = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

erhält man schliesslich

$$\Delta\nu = -\frac{c}{\lambda_o^2} \frac{\sin^2 \theta_M^{\lambda_0 + \Delta\lambda} - \sin^2 \theta_M^{\lambda_0 - \Delta\lambda}}{\frac{\lambda_0 M^2}{d^2} - 4n_0 \left.\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_0}} \tag{9}$$

für die gesuchte Zeemanaufspaltung.

Um die Interferenzmaxima von Lichtwellen zweier nahe beieinander liegenden Wellenlängen unterscheiden zu können, muss das Maximum der Welle $\lambda_0 + \Delta \lambda$ auf das erste benachbarte Minimum der Welle λ_0 fallen. Aus dieser Überlegung folgt für das Auflösungsvermögen eines Spektralapparates ganz allgemein:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = NM,$$

wobei N die Anzahl der total interferierenden Strahlenbündel ist. Bei der Lummerplatte beobachtet man üblicherweise bei fast streifendem Austritt des Strahlenbündels ($\beta \approx 90^{\circ}$, bezw. $\theta \approx 0^{\circ}$). Dann hat man sehr hohe Gangdifferenzen und es wird

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{n} \approx \frac{1}{n}.$$

Für eine Platte der Länge l errechnet sich nun N folgendermassen:

$$a = 2d \tan \alpha = 2d \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2d \frac{1}{n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = 2d \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

$$N = \frac{l}{a} = \frac{l}{2d}\sqrt{n^2 - 1}.$$

Für die innerste Ornung M_0 erhält man ebenso näherungsweise aus der Gleichung (7) die sehr grosse Zahl

$$M_0 = \frac{2d}{\lambda}\sqrt{n^2 - 1}$$

und damit schliesslich das hohe Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = NM = \frac{l}{\lambda}(n^2 - 1).$$

Diese Überlegungen sind allerdings nur für ∞ -lange Wellenzüge richtig. Wenn diese aber kurz sind (wie in unserem Experiment), dann sind die Spektrallinien verbreitert und das Auflösungsvermögen kann nicht optimal ausgenützt werden.

Umfassendere Beschreibungen der Lummerplatte findet man in Born and Wolff: Principles of Optics, Seiten 341 - 347

B Magnetfeldmessung

Das Magnetfeld B wird mit Hilfe einer Flipspule gemessen (siehe Anleitung zum Physikpraktikum für Naturwissenschafter, Physik-Institut der Universität Zürich, Versuch H). Die Flipspule besteht aus N Windungen Kupferdraht, wobei alle die gleiche Fläche A umwickeln. Bewegt man die Spule durch ein räumlich inhomogenes Magnetfeld, so wird nach dem Gesetz von Faraday an ihren Enden eine Spannung induziert. Aus der zeitliche Integration dieser Spannung lässt sich die totale Felddifferenz zwischen Anfangspunkt und Endpunkt der Bewegung berechnen.

$$U_{\rm ind} = -NA \frac{dB}{dt}; \quad \Delta B = -\frac{1}{NA} \int_1^2 U_{\rm ind} dt$$

In unserem Fall wird die Spule aus der Mitte zwischen den Polschuhen in den feldfreien Raum ausserhalb des Elektromagneten bewegt. Die Integration erfolgt durch eine elektronische Spannungsintegratorschaltung, und die am Integratorausgang gemessene Spannung entspricht bis auf den Integrator-Proportionalitätsfaktor $K = 1/(2\pi 50s^{-1})$ dem gesuchten Magnetfeld. Es gilt:

$$B = \frac{U_{\text{Integrator}}}{314.16 \cdot A \cdot N}$$

Die Integrator-Ausgangsspannung für das eingestellte Feld soll mehrmals ermittelt werden, um den statistischen Fehler abzuschätzen.

C Apparategrössen

Flipspule: Die Angaben sind auf dem Spulenträger eingraviert.

Windungszahl	
Durchmesser der Kreisfläche	
Drahtdurchmesser	

Wellenlängen:

gelb	$585.249~\mathrm{nm}$
blau-grün	$540.056~\mathrm{nm}$

Lummerspektrometer:

Dicke der Lummerplatte	3.213(1) mm
Abstand Fernrohrdrehpunkt – Mikrometerschraube	ausmessen

Brechungsindex und Dispersion des Lummerplattenglases:

Diese Angaben bei den entsprechenden Wellenlängen sind aus folgender Tabelle oder aus der beigelegten Grafik zu entnehmen.

λ [nm]	404.7	435.8	480.0	486.1	546.1	587.6	589.3
n	1.5306	1.5262	1.5216	1.5211	1.5168	1.5145	1.5145
λ [nm]	643.8	656.3	768.2				
n	1.5121	1.5117	1.5085				

g–Faktor–Literaturwerte

Aus: E.Condon, U. Edward: Handbook of physics, p.7 ff.:

gelb	1.034		
blau-grün	1.464		



17

Literatur

- T. Mayer Kuckuk: Atomphysik: eine Einführung, 4. Auflage, Teubner Stuttgart, 1994.
- [2] P. Huber, H. H. Staub: Einführung in die Physik, Band 3/Teil 1:Atomphysik, 1970.
- [3] H. Haken, H. C. Wolf: Atom und Quantenphysik, 6. Auflage, Springer Berlin, 1996.
- [4] M. Born and E. Wolff: Principles of Optics, 3rd Edition, Pergamon Press, 1965.
- [5] R. Engfer: Vorlesungs-Skript Physik A 2. Teil (Abschnitt 8.3.6 a), Physik Institut der Universität Zürich, 1996.
- [6] C. E. Moore: Atomic Energy levels, 1952.
- [7] E.Condon, U. Edward: Handbook of physics, McGraw-Hill, 1958.
- [8] E. Back: Annalen der Physik Band 76, p. 317, 1925.