Datenanalyse
(PHY231)
Herbstsemester 2017

Olaf Steinkamp

36-J-05 olafs@physik.uzh.ch 044 63 55763

Vorlesungsprogramm

- **Einführung, Messunsicherheiten, Darstellung von Messdaten**
- **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**
  - Mittelwert, Standardabweichung, Kovarianz und Korrelation
- **Fehlerfortpflanzungsgesetz**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
  - diskrete Verteilungen, kontinuierliche Verteilungen
  - zentraler Grenzwertsatz
- **Monte-Carlo Methode**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen II**
  - Faltung zweier Verteilungen
  - Verteilungen zweier Variablen
- **Stichproben und Schätzfunktionen**
  - Maximum-Likelihood Methode
  - Methode der kleinsten Quadrate
- **Interpretation von Messergebnissen**
  - Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen

Beispielprogramme im Verzeichnis
`/disk/puma/da/vorl/vert`

Beispiel Kopf oder Zahl

Werfe eine Münze

- **gleiche Wahrscheinlichkeit für Ergebnisse Kopf und Zahl:** $P(\mathrm{K}) = P(\mathrm{Z}) = 1/2$

Werfe vier Münzen

- **Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis** (zB. ZKZZ) $= (1/2)^4 = 1/16$
- **Wahrscheinlichkeit $P(k)$ für k × Kopf:**
  - k=4: 1 Möglichkeit (KKKK) ⇒ $P(k=4) = 1/16$
  - k=3: 4 Möglichkeiten (KKKZ,KKZK,KZKK,ZKKK) ⇒ $P(k=3) = 4/16$
  - k=2: 6 Möglichkeiten (KKZZ,KZKZ,KZZK,ZKKZ,ZKZK,ZZKK) ⇒ $P(k=2) = 6/16$
  - k=1: 4 Möglichkeiten (KZZZ,ZKZZ,ZZKZ,ZZZK) ⇒ $P(k=1) = 4/16$
  - k=0: 1 Möglichkeit (ZZZZ) ⇒ $P(k=0) = 1/16$
- **Wahrscheinlichkeit dafür, dass "irgendetwas" passiert:** $\sum_{k=0}^{4} P(k) = 16/16$

k = Zufallsvariable ; $P(k)$ = Wahrscheinlichkeitsverteilung

Diskrete Zufallsverteilung

Zufallsvariable *k* kann diskrete Werte annehmen

- ordne jedem möglichen Wert von *k* eine Wahrscheinlichkeit *P*(*k*) zu
- Normierung

$$\sum_k P(k) = 1$$

- Erwartungswert

$$\langle k \rangle \equiv \sum_k \{ k \cdot P(k) \}$$

- Varianz

$$V(k) \equiv \sum_k \left\{ (k - \langle k \rangle)^2 \cdot P(k) \right\} = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$$

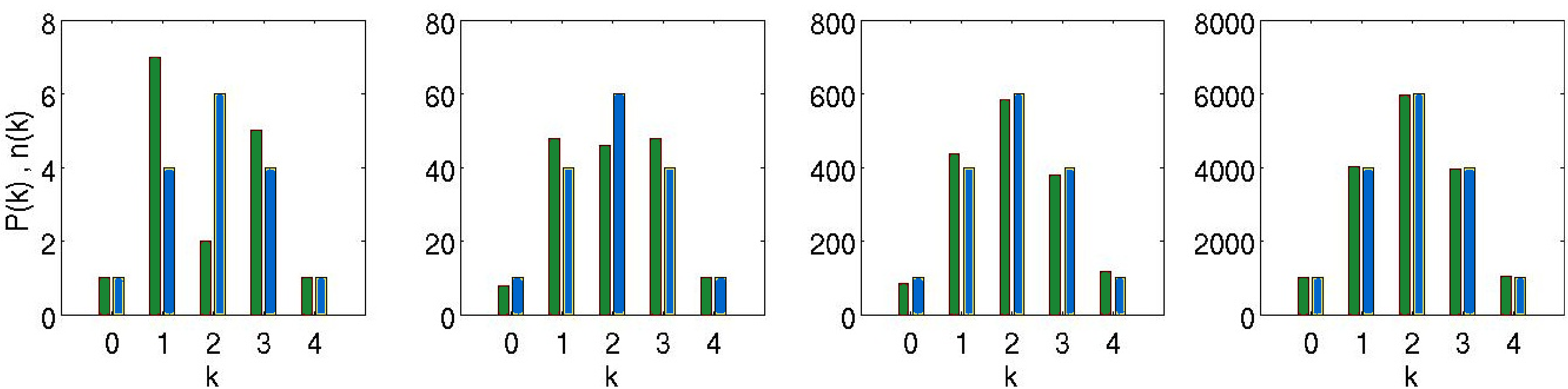
- Erwartungswert und Varianz einer Funktion *f(k)* der Zufallsvariablen

$$\langle f(k) \rangle \equiv \sum_k \{ f(k) \cdot P(k) \} \quad ; \quad V(f) \equiv \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$$

Gesetz grosser Zahlen

Experiment : werfe *N* × 4 Münzen

		k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
N = 16	erwarte beobachte	1 1	4 7	6 2	4 5	1 1
N = 160	erwarte beobachte	10 8	40 48	60 46	40 48	10 10
N = 1600	erwarte beobachte	100 84	400 438	600 584	400 378	100 116
N = 16000	erwarte beobachte	1000 1021	4000 4004	6000 5977	4000 3960	1000 1038



Gesetz grosser Zahlen

Die beobachtete relative Häufigkeitsverteilung eines Zufallsexperiments nähert sich der erwarteten theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung immer mehr an, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird.

- **Mittelwert der Häufigkeitsverteilung aus *N* Experimenten**
- **Erwartungswert der erwarteten Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$\bar{k} \equiv \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} k_i$$

$$\langle k \rangle \equiv \sum_k k \cdot P(k)$$

- **Gesetz großer Zahlen**

$$\boxed{\bar{k} \underset{N \to \infty}{\to} \langle k \rangle}$$

- **entsprechend für Varianz der Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$\overline{k^2} - \bar{k}^2 \underset{N \to \infty}{\to} \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$$

Binomialverteilung

Experiment mit zwei möglichen Ergebnissen (z.B. “Kopf oder Zahl”)

- **konstante Wahrscheinlichkeit *p* für “positives” Ergebnis**

⇒ konstante Wahrscheinlichkeit (1–*p*) für “negatives” Ergebnis

Führe das Experiment *n*-mal aus

- **die Experimente seien unabhänging voneinander**
- **Wahrscheinlichkeit für *k* “positive” Ergebnisse aus *n* “Versuchen”**

$$\boxed{P(k \mid p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- **Erwartungswert**

$$\langle k \rangle = n \cdot p$$

- **Varianz**

$$V(k) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Beweise Binomialverteilung

- **Normierung**

$$\sum_{k=0}^{n} P(k\,|\,p,n) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right\} = \left(p+(1-p)\right)^n = 1$$

- **Erwartungswert:**

$$\langle k\rangle = \sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k(1-p)^{n-k} = n\cdot p\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$= n\cdot p\cdot\underbrace{\sum_{k'=0}^{n'}\frac{(n')!}{(k')!(n'-k')!}\,p^{k'}(1-p)^{n'-k'}}_{=\,(p+(1-p))^{n'}\,=\,1}$$

$k' \equiv k-1$
$n' \equiv n-1$

- **Varianz:**

$$V(k) = \langle k^2\rangle-\langle k\rangle^2 = \langle k^2\rangle-\langle k\rangle+\langle k\rangle-\langle k\rangle^2 = \underbrace{\langle k^2-k\rangle}_{n\cdot(n-1)\cdot p^2}+\underbrace{\langle k\rangle}_{n\cdot p}-\underbrace{\langle k\rangle^2}_{(n\cdot p)^2} = n\cdot p\cdot(1-p)$$

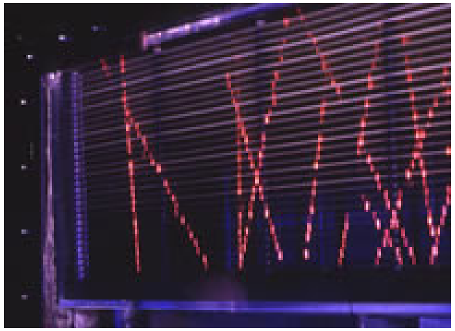
$$\langle k^2-k\rangle = \langle k\cdot(k-1)\rangle = \sum_{k=0}^{n}\left\{k\cdot(k-1)\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k(1-p)^{n-k}\right\}$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot\underbrace{\sum_{k'=0}^{n'}\left\{\frac{(n')!}{(k')!(n'-k')!}\,p^{k'}(1-p)^{n'-k'}\right\}}_{=(p+(1-p))^{n'}=1}$$

$k' \equiv k-2$
$n' \equiv n-2$

Beispiel: Effizienz einer Funkenkammer

Messe Spuren geladener Teilchen (z.B. aus kosmische Strahlung)



- **parallele Metallplatten in Gasvolumen, elektrische Spannung kurz unterhalb der Durchbruchspannung**
- **geladenes Teilchen ionisiert Gas und löst Funken aus**
- **Annahmen für Rechenbeispiel:**
  - 95% Wahrscheinlichkeit, dass in einer Detektorlage ein Funken ausgelöst wird
  - benötige Funken in mindestens drei Detektorlagen um eine Spur nachzuweisen
- **Drei Detektorlagen:** benötige 3 von 3 möglichen Treffern

$$P(k=3\,|\,p=0.95,n=3) = 0.95^3 = 0.857$$

- **Vier Detektorlagen:** benötige 3 oder 4 von 4 möglichen Treffern

$$P(4\,|\,0.95,4) + P(3\,|\,0.95,4) = 0.815 + 0.171 = 0.986$$

- **Fünf Detektorlagen:** benötige 3, 4 oder 5 von 5 möglichen Treffern

$$P(5\,|\,0.95,5) + P(4\,|\,0.95,5) + P(3\,|\,0.95,5) = 0.774 + 0.204 + 0.021 = 0.999$$

Poissonverteilung

Näherung der Binomialverteilung für großes n $(n \to \infty)$

- schreibe $\mu = n \cdot p$ für den Erwartungswert und setze in Binomialverteilung ein:

$$P\left(k \mid \frac{\mu}{n}, n\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$$

- für $n \to \infty$:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \underset{n \to \infty}{\to} n^k \qquad \text{und} \qquad \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \underset{n \to \infty}{\to} e^{-\mu}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(k \mid \mu) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}}$$

- Erwartungswert

$$\langle k \rangle = \mu$$

- Varianz

$$V(k) = \mu$$

- benutze Poisson, wenn $n \gg \mu$ und wenn n und p nicht einzeln bekannt sind
  - z.B. Anzahl Kernzerfälle pro Zeitintervall in einer radioaktiven Quelle

Beweise Poissonverteilung

- **Normierung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k\,|\,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}\right\} = e^{-\mu}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}}_{=e^{\mu}} = 1 \qquad ✓$$

- **Erwartungswert:**

$$\langle k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{k\cdot\frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}\right\} = \mu\,e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \mu\,e^{-\mu}\underbrace{\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{\mu^{k'}}{(k')!}}_{=e^{\mu}} = \mu$$

- vgl. Binomialverteilung

$$\langle k\rangle = n\cdot p \equiv \mu \qquad ✓$$

- **Varianz:**

$$V(k) = \langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2 = \langle k^2\rangle - \langle k\rangle + \langle k\rangle - \langle k\rangle^2 = \underbrace{\langle k^2 - k\rangle}_{=\mu^2} + \underbrace{\langle k\rangle}_{=\mu} - \underbrace{\langle k\rangle^2}_{=\mu^2} = \mu$$

$$\langle k^2 - k\rangle = \langle k\,(k-1)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{k\,(k-1)\cdot\frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}\right\} = \mu^2\,e^{-\mu}\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!}}_{=e^{\mu}} = \mu^2$$

- vgl. Binomialverteilung

$$n\to\infty \;\Rightarrow\; p=\mu/n\to 0 \;\Rightarrow\; 1-p\to 1 \;\Rightarrow\; V(k) = n\cdot p\cdot(1-p)\to n\cdot p \equiv \mu \qquad ✓$$

Beispiel: tödliche Pferdetritte

Beobachte für 20 Jahre 10 Regimenter der preussischen Kavalerie

- **zähle insgesamt 122 Todesfälle durch Pferdetritte**
- **beobachtete Verteilung pro Regiment und Jahr:**

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**≥5**
beobachtet	109	65	22	3	1	0

- **im Mittel 122 / (20×10) = 0.61 Todesfälle pro Regiment pro Jahr**
  - weiss aber nicht, wieviele Versuche *n* (Pferdetritte) stattgefunden haben und wie groß die Wahrscheinlichkeit *p* für Erfolg (Reiter tot) ist

- **nehme an, dass n ≫ μ → Poissonverteilung mit Erwartungswert μ = 0.61**

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**≥5**
Poisson (μ = 0.61)	108.7	66.3	20.2	4.1	0.63	0.07

Vorlesungsprogramm

- **Einführung, Messunsicherheiten, Darstellung von Messdaten**
- **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**
  - Mittelwert, Standardabweichung, Kovarianz und Korrelation
- **Fehlerfortpflanzungsgesetz**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
  - diskrete Verteilungen, kontinuierliche Verteilungen
  - zentraler Grenzwertsatz
- **Monte-Carlo Methode**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen II**
  - Faltung zweier Verteilungen
  - Verteilungen zweier Variablen
- **Stichproben und Schätzfunktionen**
  - Maximum-Likelihood Methode
  - Methode der kleinsten Quadrate
- **Interpretation von Messergebnissen**
  - Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen

Beispielprogramme im Verzeichnis
`/disk/puma/da/vorl/vert`

Kontinuierliche Zufallsverteilung

Zufallsvariable kann kontinuierliche Werte annehmen

- definiere WahrscheinlichkeitsDICHTE

$$p(x) \equiv \frac{\text{Wahrscheinlichkeit für Wert zwischen } x \text{ und } x+dx}{dx} \quad \text{für } dx \to 0$$

- Wahrscheinlichkeit für einen Wert x zwischen x_1 und x_2 :

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx$$

- Normierung:

$$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$$

- Erwartungswert:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\, dx$$

- Varianz:

$$V(x) \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Kumulative Verteilungsfunktion

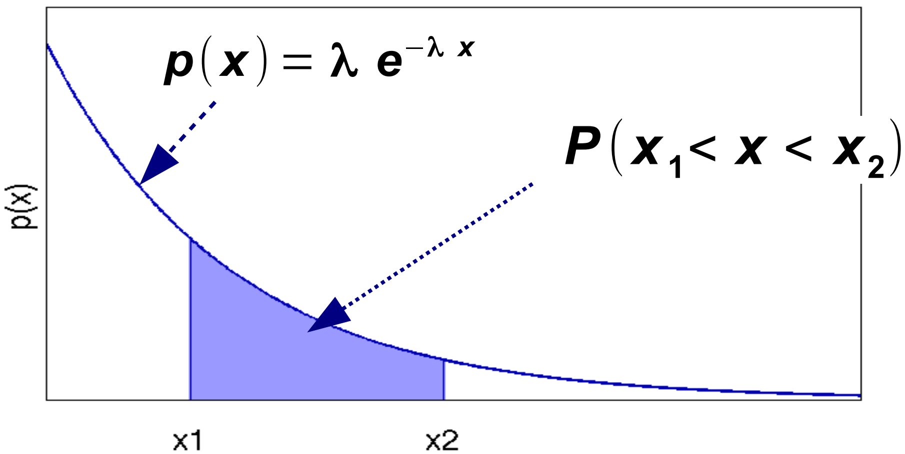
Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert < *x* annimmt

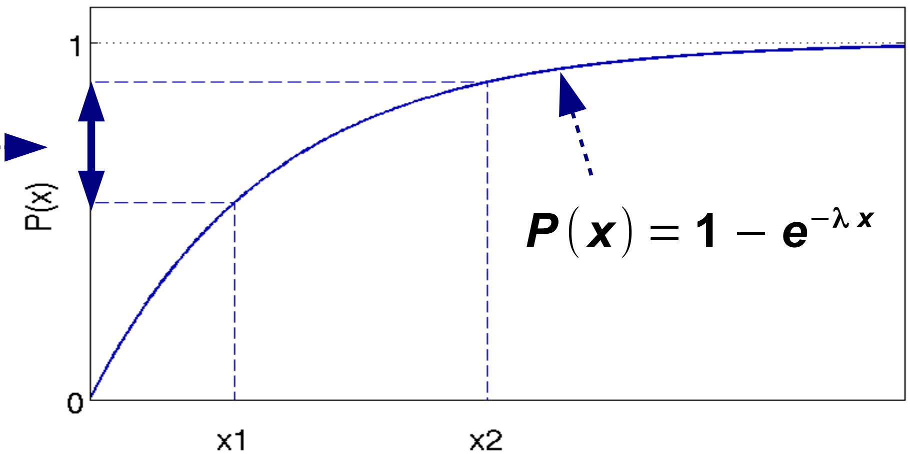
$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x')\,dx'$$

- **Wahrscheinlichkeit für einen Wert zwischen x_1 und x_2:**

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x=x_1}^{x=x_2} p(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad P(x_1 < x < x_2) = P(x_2) - P(x_1)$$

- **Beispiel Exponentialverteilung**





Exponentialverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte (ein Parameter: "Zerfallskonstante" λ)

$$p(x\,|\,\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$ für x ≥ 0

- **Normierung**

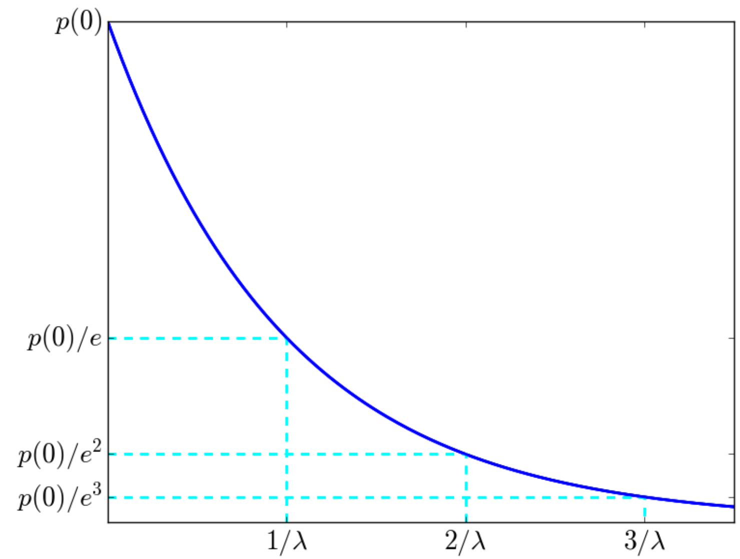
$$\int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \lambda \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda \cdot x}\, dx}_{=1/\lambda} = 1$$

- **Erwartungswert**

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

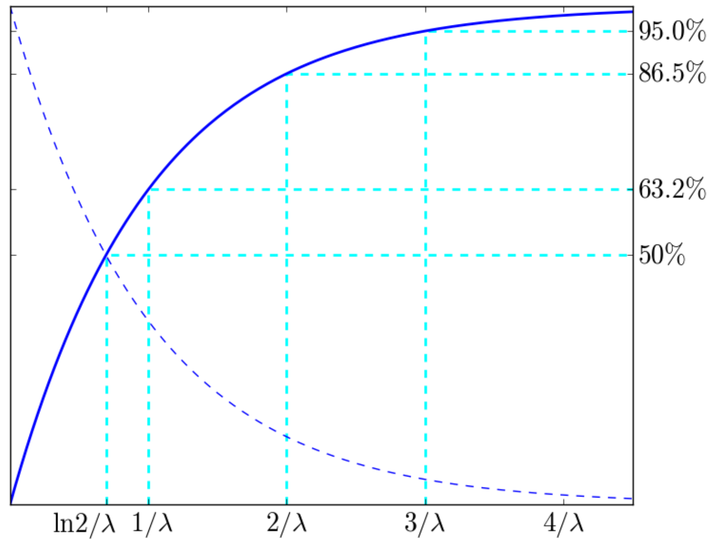
- **Varianz**

$$V(x) = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}$$



Kumulative Verteilungsfunktion

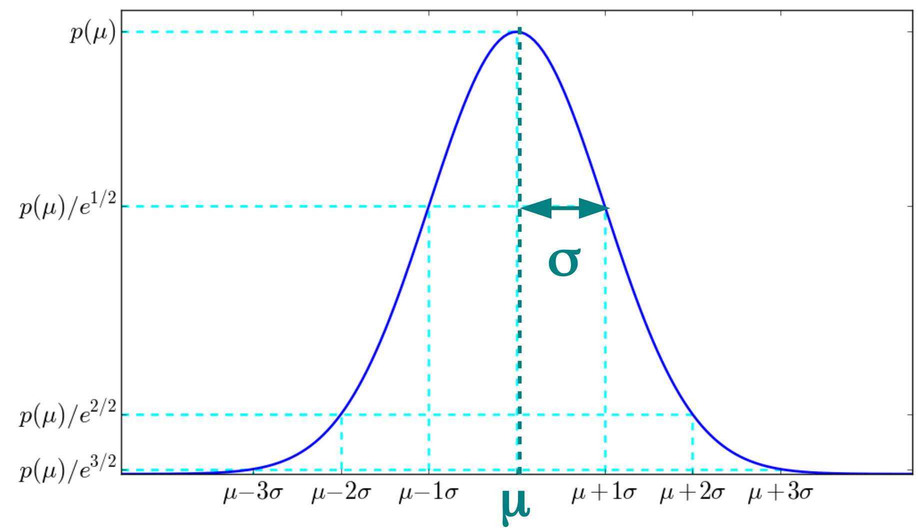
$$P(x) = \lambda \cdot \int_0^x e^{-\lambda \cdot x'}\, dx' = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$



Gaußverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte (zwei Parameter: Erwartungswert μ, Standardabw. σ)

$$p(x\,|\,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- **Erwartungswert**

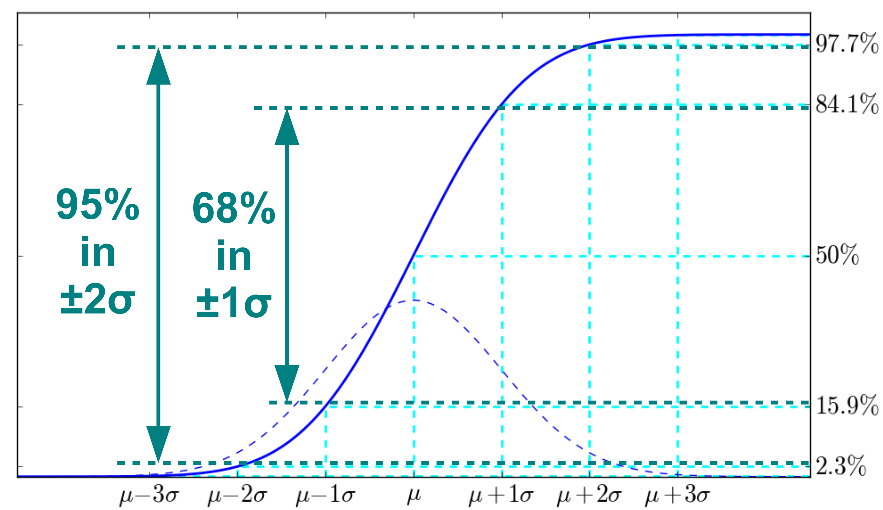
$$\langle x \rangle = \mu$$

- **Varianz**

$$V(x) = \sigma^2$$

Kumulative Verteilungsfunktion

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right)$$



- **"error function"**

$$\mathrm{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-x'^2}\, dx'$$

durch numerische Integration (Integral analytisch nicht lösbar)

Beweise Gaußverteilung

- **Normierung**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x'^2}{2\sigma^2}}\, dx'}_{=\sqrt{2\pi\sigma^2}} = 1$$

- **Erwartungswert**

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx}_{=\,0} + \mu \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx}_{=\,1} = \mu$$

- **Varianz**

$$V(x) = \langle (x-\mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x'^2\, e^{\frac{-x'^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2$$

- **verwendete bestimmte Integrale**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \Bigg| \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1}\, e^{-ax^2}\, dx = 0 \qquad \Bigg| \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Python: `from scipy import stats`

Für kontinuierliche Verteilungen (z.B. Exponentialverteilung)

- `stats.expon.pdf` – **Wahrscheinlichkeitsdichte**
- `stats.expon.cdf` – **kumulative Verteilungsfunktion**
- `stats.expon.ppf` – **inverse kumulative Verteilungsfunktion**

Für diskrete Verteilungen (z.B. Poissonverteilung)

- `stats.poisson.pmf` – **Wahrscheinlichkeit**
- `stats.poisson.cdf` – **kumulative Verteilungsfunktion**
- `stats.poisson.ppf` – **inverse kumulative Verteilungsfunktion**

Weitere wichtige Verteilungen

- `stats.binom.*` – **Binomialverteilung**
- `stats.norm.*` – **Gaußverteilung** (“normal distribution”)
- `stats.uniform.*` – **Gleichverteilung** (“uniform distribution”)
- `stats.cauchy.*` – **Breit-Wigner Verteilung** (“Cauchyverteilung”)
- `stats.chi2.*` – **χ^2-Verteilung**

… und viele mehr, siehe python Dokumentation

Vorlesungsprogramm

- **Einführung, Messunsicherheiten, Darstellung von Messdaten**
- **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**
  - Mittelwert, Standardabweichung, Kovarianz und Korrelation
- **Fehlerfortpflanzungsgesetz**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
  - diskrete Verteilungen, kontinuierliche Verteilungen
  - zentraler Grenzwertsatz
- **Monte-Carlo Methode**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen II**
  - Faltung zweier Verteilungen
  - Verteilungen zweier Variablen
- **Stichproben und Schätzfunktionen**
  - Maximum-Likelihood Methode
  - Methode der kleinsten Quadrate
- **Interpretation von Messergebnissen**
  - Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen

Beispielprogramme im Verzeichnis
`/disk/puma/da/vorl/vert`

Zentraler Grenzwertsatz

<u>Summiere *N* voneinander unabhängige Zufallsvariablen x_i</u> ($i = 1, ..., N$)

- **Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable x_i hat**

Erwartungswert μ_i und Varianz σ_i^2

- **die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung spielt keine Rolle**

- **die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable**

$$X \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i$$

hat den Erwartungswert

$$\langle X \rangle = \sum_{i=1}^{N} \mu_i$$

hat die Varianz

$$V(X) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$$

strebt für $N \rightarrow \infty$

einer Gaußverteilung entgegen

- **aufgepasst: gilt nur wenn die x_i statistisch voneinander unabhängig sind !!!!!**

Beweise zentraler Grenzwertsatz

- **Erwartungswert**

$$\langle X \rangle = \left\langle \sum_i x_i \right\rangle = \sum_i \langle x_i \rangle = \sum_i \mu_i$$

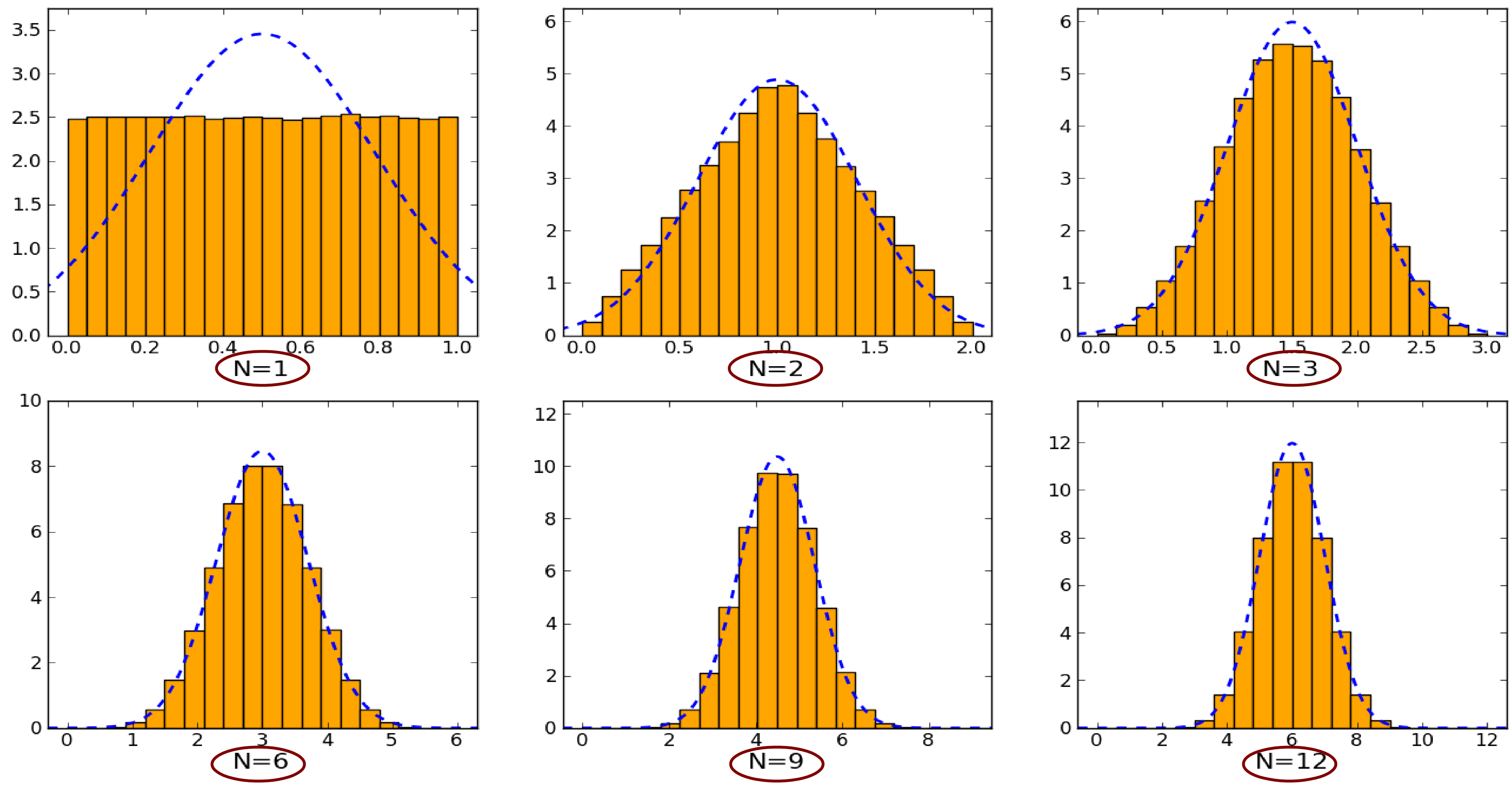
- **Varianz**

$$\begin{aligned}
V(X) &= \left\langle \left(X - \langle X \rangle \right)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\sum_i x_i - \sum_i \mu_i \right)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\sum_i (x_i - \mu_i) \right)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_i (x_i - \mu_i)^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} (x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j) \right\rangle \\
&= \sum_i \underbrace{\left\langle (x_i - \mu_i)^2 \right\rangle}_{\sigma_i^2} + \sum_i \sum_{j \neq i} \underbrace{\left\langle (x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j) \right\rangle}_{cov(x_i, x_j)}
\end{aligned}$$

x_i und x_j statistisch voneinander unabhängig $\Leftrightarrow$ cov $(x_i, x_j) = 0$

Beispiel zentraler Grenzwertsatz

***N* unabhängige Zufallsvariablen, jeweils von 0 bis 1 gleichverteilt**



------- **Gaussverteilung mit $\mu = N / 2$ und $\sigma = \sqrt{N / 12}$**

Gaußverteilte Messunsicherheiten

Abweichung einer Messung vom “wahren” Wert hat meist viele Beiträge

- **z.B. Rauschsignal in Messelektronik**
  - viele Bauteile (Widerstände, Kondensatoren,…)
  - zufällige Spannungs-/Stromfluktuationen in jedem dieser Bauteile
  - gesamtes Rauschsignal ist Summe aller dieser Beiträge

wenn diese Einzelbeiträge statistisch unabhängig voneinander sind,
gilt der zentrale Grenzwertsatz:

Abweichungen der Messwerte vom wahren Wert folgen einer Gaußverteilung

- **gilt NICHT, wenn die Einzelbeiträge nicht statistisch unabhängig sind**
  - **z.B. bei gemeinsamen systematischen Unsicherheiten**
- **gilt NICHT, wenn eine einzelne Fehlerquelle die Abweichungen dominiert**

Annahme gaußverteilter Abweichungen ist eine (nicht immer gute**) Näherung**

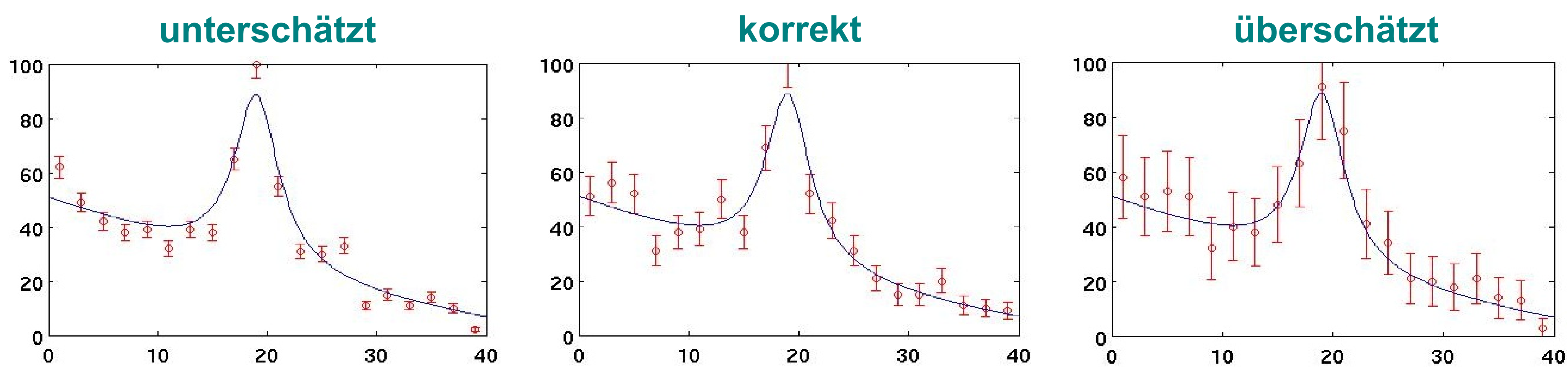
Gaußverteilte Messunsicherheiten

Fehlerbalken geben ± 1 Standardabweichung um den Messwert an

s. Folie 17

- **für gaußverteilte Messabweichungen vom wahren Wert**
  - sollten 68 % der Messwerte innerhalb ±1·σ um den wahren Wert liegen
  - sollten ~1/3 der Fehlerbalken den wahren Wert nicht enthalten
- **erlaubt grobe Kontrolle, ob Messunsicherheiten korrekt bestimmt sind**

Messunsicherheit



Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer Zufallsvariablen

- **diskrete und kontinuierliche Zufallsvariablen**
  - kontinuierliche: Wahrscheinlichkeitsdichte, kumulative Verteilungsfunktion
- **Normierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Definition des Erwartungswerts und der Standardabweichung**
- **Beispiele: Binomial, Poisson (**diskret**), Exponential, Gauß (**kontinuierlich**)**
  - Definitionen, Parameter, Erwartungswerte, Standardabweichungen
  - Anwendungsbeispiele (→ **Uebungsaufgaben !!!**)
- **Gesetz großer Zahlen:** gemessene Häufigkeitsverteilung nähert sich der erwarteten theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung immer besser an, je öfter man das Experiment wiederholt
- **zentraler Grenzwertsatz:** ist eine Zufallsvariable die Summe vieler voneinander unabhängiger Zufallsvariablen, dann nähert sich ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Gaußverteilung an; ihr Erwartungswert ist die Summe der Erwartungswerte, ihre Varianz ist die Summe der Varianzen der einzelnen Verteilungen