Gedämpfte Schwingung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Dämpfungsrate

$$x(t) = e^{-at} = e^{-\gamma t} \cdot e^{-i\omega t}$$

Ansatz

komplexe Zahl $\quad a = \gamma + i\omega \quad$ (inspiriert von Fourier)

$$a^2 \cancel{e^{-at}} - 2\gamma a \cancel{e^{-at}} + \omega_0^2 \cancel{e^{-at}} = 0$$

$$a^2 - 2\gamma a + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{\cancel{2}\gamma \pm \sqrt{\cancel{4}\gamma^2 - \cancel{4}\omega_0^2}}{\cancel{2}}$$

$$x(t) = e^{-\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

für $\omega_0 > \gamma \Rightarrow \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot e^{\pm i\omega t} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$\omega_0 \gg \gamma \Rightarrow \omega \cong \omega_0$

für $\gamma > \omega_0$ $\quad \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ ist reell $\Rightarrow$ reine exponentielle Dämpfung

$$x(t) = e^{-\gamma' t} \qquad \gamma' = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma \gg \omega_0 \Rightarrow \gamma' \simeq 2\gamma$

Gekoppelte Pendel

2 harmonische Schwingungen mit leicht unterschiedlicher Frequenz

$$x_R(t) = x_0 e^{i\omega_R t} = x_0 e^{i(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2})t} \quad \omega_R = \omega_0 - \delta\omega/2$$

$$x_S(t) = x_0 e^{i\omega_S t} = x_0 e^{i(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2})t} \quad \omega_S = \omega_0 + \delta\omega/2$$

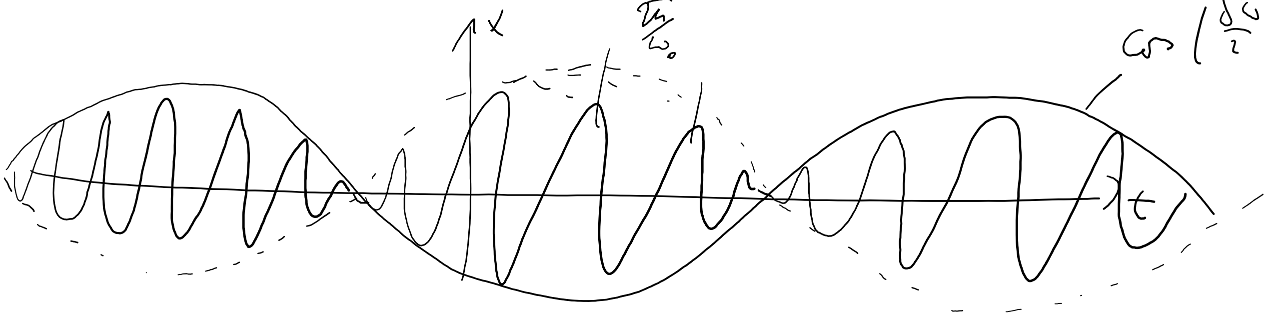
$$x_{total} = x_R(t) + x_S(t) = x_0 e^{i(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2})t} + x_0 e^{i(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2})t}$$

$$= x_0 e^{i\omega_0 t} \underbrace{\left(e^{-i\frac{\delta\omega}{2}t} + e^{i\frac{\delta\omega}{2}t} \right)}_{2\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t\right)}$$

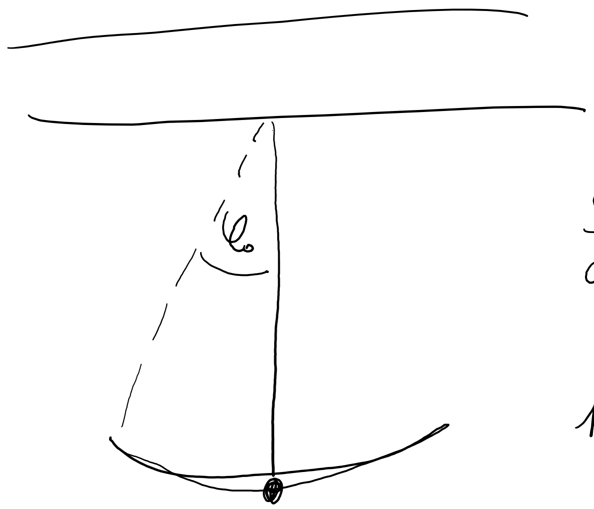
$$x_{total}(t) = \boxed{2x_0 \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t\right)} \cdot e^{i\omega_0 t}$$

Grund der Kopplung

Grundschwingung



mathematischer Pendel



$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\varphi \cong -\omega_0^2\varphi$$

für kleine φ $\quad \varphi \cong \sin\varphi$