MMP I
Klausur

HS 14
Prof. Ph. Jetzer

Diese Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Um die Klausur zu bestehen, wird nicht erwartet, dass in der vorhandenen Zeit alle Aufgaben gelöst werden. Gib einfach dein Bestes!

Vorname	
Name	
Matrikel-Nr.	

1	2	3	4	5	6	Total

(Bitte leer lassen!)

Aufgabe 1 [Fourierreihen (10 Punkte)]

Finde die Fourierreihen (in reeller Schreibweise) der folgenden Funktionen:

a) $g(x) = x(1-x)$ für $x \in [-\pi, \pi]$
Benütze das Resultat um den Wert der Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ zu bestimmen.

b) $h(x) = 1 + x + |x|$ für $x \in [-1, 1]$

Aufgabe 2 [Fouriertransformationen (8 Punkte)]

Gegeben sei die Gleichung

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \infty),$$

mit Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u(x, t=0) & = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} & = u_1(x) \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

a) Finde mithilfe eines Separationsansatzes einen Ausdruck für die Lösung des obigen Problems.

b) Seien nun

$$u_0(x) = e^{-\frac{(x+a)^2}{2}}$$
$$u_1(x) = 0$$

Benütze das Ergebnis von a) um die explizite Lösung $u(x,t)$ zu berechnen.

Aufgabe 3 [Differentialgleichungen (10 Punkte)]

Finde die allgemeine, reelle Lösung $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' + x^2\,y^2 - 1 = y^2 - x^2$. Sind die Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

b) $y' = \sin(x)\,\cos(x) + y\,\sin(x)$

c) Differentialgleichungssystem für $y = (y_1, y_2, y_3)$:

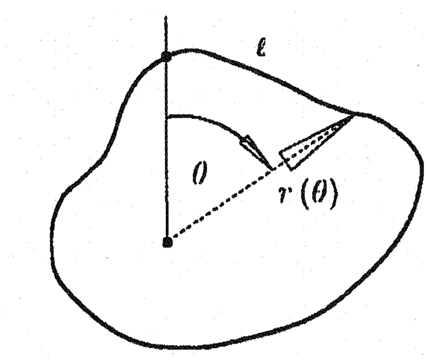
$$\begin{cases} y_1' &= -y_3 \\ y_2' &= 3y_1 + 3y_2 + y_3 \\ y_3' &= 4y_1 \end{cases}$$

Aufgabe 4 [Variationsrechnung (10 Punkte)]

Gegeben sei eine Schnur der Länge L, die an ihren Enden zusammengeklebt ist und damit eine Schlaufe um den Koordinaten-Ursprung ($r = 0$) bildet. Finde diejenige Kurve, welche die Fläche der Schlaufe maximiert. Welche Form hat die Kurve?

Arbeite in Polarkoordinaten (r, θ) mit $\theta \in [0, 2\pi)$ und benütze die Techniken der Variationsrechnung (mit einem Lagrange Multiplikator).

Hinweis: Finde für eine infinitesimale Winkeländerung $d\theta$ das zugehörige Flächenelement dA und das Längenelement dl.



Aufgabe 5 [Hermitesche Operatoren (7 Punkte)]

Betrachte den linearen Raum $\mathcal{R}$ der komplexen, auf dem Intervall $[a, b]$ definierten C^2-Funktionen mit $f(a) = f(b) = 0$. Das Skalarprodukt sei gegeben durch $(f, g) :=$

$\int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$.

a) Finde die Menge aller $\alpha \in \mathbb{C}$, für die der Operator

$$Af(x) := f''(x) + \alpha f'(x)$$

Hermitesch ist.

b) Zeige, dass $e^{-\alpha x}$ eine Eigenfunktion von A ist und berechne den dazugehörigen Eigenwert.

Aufgabe 6 [Distributionen und Kugelfunktionen (7 Punkte)]

Betrachte die Distribution

$$\rho(\vec{x}) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\delta(\vec{x}), \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

wobei $\delta(\vec{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ die 3-dimensionale Dirac'sche Distribution ist.

a) Zeige, dass

$$\varphi(\vec{x}) := \int \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3}.$$

(Wir benützen hier die Notation $r \equiv |\vec{x}|$).

b) Berechne die Koeffizienten

$$q_{lm} := \int d^3x' \overline{Y_{lm}} r'^l \rho(\vec{x}')$$

für $l = 0, 1$ und $m = -l, ..., l$ und zeige, dass

$$\varphi(\vec{x}) = 4\pi \sum_{l=0}^{1} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}.$$

Viel Erfolg!