

Kapitel 2

Verteilungen I

2.1 Binomialverteilung

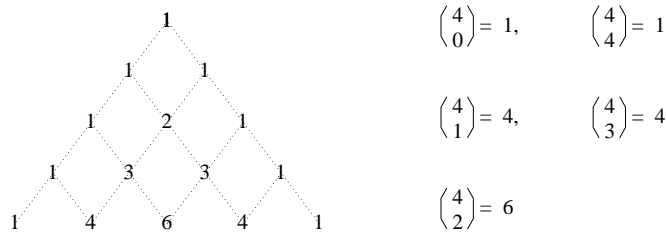


Abbildung 2.1: Links: Das Pascalsche Dreieck. Rechts: Alle Möglichkeiten für $n = 4$.

Die Binomialverteilung ist die fundamentalste Wahrscheinlichkeitsverteilung. Man kann sie dort anwenden, wo ein Experiment nur zwei mögliche Ergebnisse hat (“ja” oder “nein”). Beispiele sind das Werfen einer Münze (“Kopf” oder “Zahl”) und die Antwort eines Diskriminators auf ein Eingangssignal (logisches Ausgangssignal “0” oder “1”).

Ist p die Wahrscheinlichkeit für das “positive” Ergebnis (z.B. $p = 1/2$ für “Kopf”), so ist $q \equiv 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für das “negative” Ergebnis. Wiederholt man das Experiment n mal, so ist die Wahrscheinlichkeit k “positive” Ergebnisse zu erhalten

$$P(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (2.1)$$

wobei

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.2)$$

die Zahl der Möglichkeiten ist k “positive” Ergebnisse aus n Versuche zu erhalten (z.B. 6 Möglichkeiten für 2 aus 4: 1100, 1010, 1001, 0110, 0101 und 0011; siehe Abb. 2.1).

Der Binomialverteilung ist, wie es sein sollte, auf 1 normiert. Dies folgt direkt aus der binomischen Entwicklung von $(p + q)^n$

$$\sum_{k=0}^n P(k; n, p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1 \quad (2.3)$$

Der Mittelwert (Erwartungswert von k , Gl. 1.11) ist

$$\begin{aligned} \mu = E(k) &= \sum_{k=0}^n k P(k; n, p) = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k')!(n-1-k')!} p^{k'} q^{n-1-k'} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned} \quad (2.4)$$

was man auch ohne Rechnung sofort einsieht. Wichtiger ist die folgende Berechnung der Schwankungsbreite. Das zweite Moment ist

$$\begin{aligned} E(k^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 P(k; n, p) = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} + np \\ &= np \sum_{k'=0}^{n-1} k' \frac{(n-1)!}{(k')!(n-1-k')!} p^{k'} q^{n-1-k'} + np = np(n-1)p + np \end{aligned}$$

und die Varianz (Gln. 1.12, 1.13)

$$\sigma^2 = E(k^2) - \mu^2 = np(1-p) = npq \quad (2.5)$$

In Abb. 2.2 sind verschiedene Binomialverteilungen $P(k; n, p)$ mit den entsprechenden Gauss-Verteilungen $f(x; np, \sqrt{npq})$ (Gl. 1.47) verglichen. Symmetrische Binomialverteilungen ($p = q = 1/2$) werden schon für $np \geq 5$ gut durch eine Gauss-Verteilung beschrieben. Für stark asymmetrische Binomialverteilungen ($p \ll q$) ist dies erst bei höheren np -Werten der Fall.

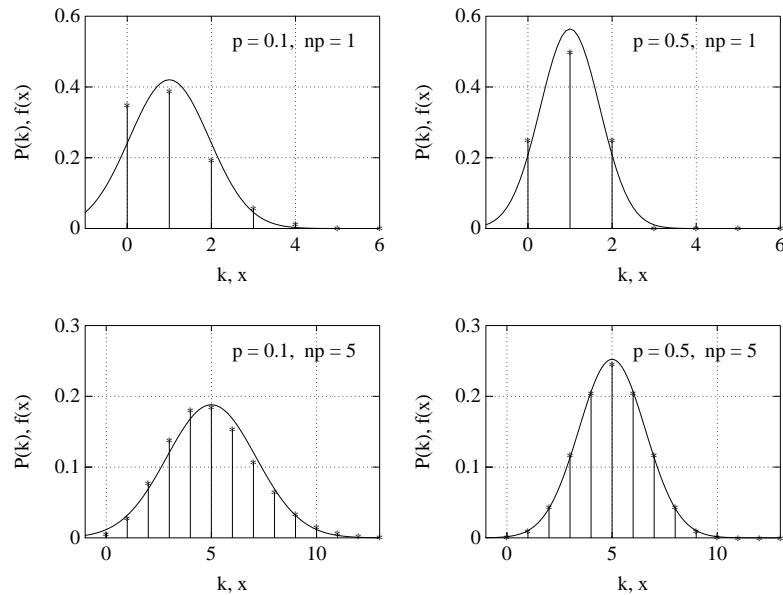


Abbildung 2.2: Der Binomialverteilung $P(k)$ verglichen mit der Gauss-Verteilung für verschiedene n - und p -Werte.

Zur Berechnung der Binomialverteilung steht in der Statistics-Toolbox die Funktion `binomial(k,n,p)` zu Verfügung (siehe Programm 2.1). Die Fakultät wird mit der Gammafunktion berechnet: $\Gamma(n+1) = n!$

```
%-----
%   MATLAB program 2.1: Binomialdistribution      (statistics-toolbox)
%   -----
function pk = binomial(k,n,p)
%       calculates the probability to observe k events out of n trials;
%       the probability for one event is p
q = 1 - p;
lk = length(k);           pk = zeros(lk,1);
for i = 1:lk
    pk(i) = gamma(n+1)*p^k(i)*q^(n-k(i))/(gamma(k(i)+1)*gamma(n+1-k(i)));
end
%-----
```

Jetzt können wir die schon im Kap. 1.1 gestellte Frage, wieviele von $n = 100$ Messwerten liegen im 1σ -Konfidenzintervall, beantworten. Für normalverteilte Messwerte ist $p = 68.3\%$ (Gauss-Verteilung, Kap. 1.4) und die erwartete Anzahl ist $np = 68.3$ mit einer Standardabweichung (statistische Schwankung) $\sigma = \sqrt{npq} = 4.7$. Ein Beispiel ist in Programm 2.2 gegeben. Von den 20 Monte-Carlo-Experimenten mit je 100 normalverteilten Werten ($\mu = 0, \sigma = 1$) liegen vier (57, 62, 62, 63) ausserhalb des 1σ -Konfidenzintervalls der Binomialverteilung ($np - \sqrt{npq}, np + \sqrt{npq}$) = (63.6, 73.0) und zwei (73, 73) gerade auf der Grenze. Da in diesem Fall die Binomialverteilung durch eine Gauss-Verteilung angenähert werden kann, erwartet man, dass 6 oder 7 Werte (1/3 von 20) ausserhalb liegen¹. Die exakte Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$1 - \sum_{k=64}^{72} P(k; 100, 0.683) = 33.5\%$$

Man beachte die unterschiedliche Programmierung der Monte-Carlo-Experimente im Programm 2.2. Für die ersten 10 wird in einer Schleife (`for i = 1:10`) jeweils ein Vektor mit 100 Werten generiert, bei der zweiten Gruppe wird auf einmal eine Matrix mit 100×10 Werten generiert.

```
%-----
%   MATLAB program 2.2: # of events in 1 sigma intervall
%   -----
randn('seed',0);
for i = 1:10                               % first 10 experiments
    x1 = randn(100,1);
    select1 = (x1 >= -1) & (x1 <= +1);     n1(i) = sum(select1);
end
x2 = randn(100,10);                         % second 10 experiments
select2 = (x2 >= -1) & (x2 <= +1);         n2 = sum(select2);

%-----
%   n1 = 71  62  66  67  69  66  66  65  57  62
%   n2 = 68  68  67  73  70  65  69  70  63  73
%-----
```

¹Man beachte, dass diese Faustregel (2/3 innerhalb, 1/3 ausserhalb) nur für die Gauss-Verteilung gilt. Für andere Verteilungen kann das Konfidenzniveau (CL, "Confidence Level") für das 1σ -Konfidenzintervall sowohl kleiner (z.B. Gleichverteilung CL = 57.7 %) als auch grösser (z.B. Exponentialverteilung CL = 86.5 %) sein als 68.3 %.

Ein wichtiges Beispiel ist die Ansprechwahrscheinlichkeit (“efficiency”) von Teilchen-Detektoren. Jeder der fünf Vieldrahtproportionalkammern (MWPC, “Multi Wire Proportional Chambers”) des SINDRUM-Detektors am PSI hat z.B. eine “efficiency” von 90 %. Um der Spur eines Elektrons aus dem Myonzerfall zu messen, sollten mindestens 4 der 5 Kammern angesprochen haben. Der Nachweiswahrscheinlichkeit eines Elektrons ist somit

$$P(4; 5, 0.90) + P(5; 5, 0.90) = 0.33 + 0.59 = 92\%$$

Die Binomialverteilung beschreibt die statistischen Schwankungen in der Zahl der Ereignisse eines Bins in einem Histogramm. Sind in einem Histogramm N Ereignisse in n Bins verteilt, so ist die Wahrscheinlichkeit N_k Ereignisse im Bin k des Histogramms zu erhalten $P(N_K; N, p_k)$. Der Erwartungswert und die Standardabweichung sind damit

$$\mu_k = Np_k \quad \text{und} \quad \sigma_k = \sqrt{Np_k(1-p_k)} \simeq \sqrt{\mu_k} \quad (2.6)$$

Die Näherung ist gültig, wenn die Wahrscheinlichkeit p_k klein ist. Als Beispiel betrachten wir $N = 1000$ Ereignisse, die eine Gleichverteilung entsprechen, in einem Histogramm mit $n = 20$ Bins. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit $p_k = 1/n$ für alle Bins gleich. Der Erwartungswert und dessen Fehler sind

$$\mu = N/n = 50.0 \quad \sigma = \sqrt{\mu(1-1/n)} = 6.9 \quad (\sigma \simeq \sqrt{\mu} = 7.1)$$

Ist p_k unbekannt, so ist die schon im Kap. 1.2 gegebene Schätzung

$$N_K \pm \sqrt{N_K}$$

eine gute Näherung, wenn N gross ist und $p_k \simeq N_K/N \ll 1$. Meistens wird ein Experiment nicht nach einer bestimmten Zahl N von Ereignissen beendet, sondern nach einer bestimmten Messzeit. In diesem Fall ist N keine feste Zahl, sondern schwankt mit einem Fehler \sqrt{N} (Poisson-Statistik, siehe nächster Abschnitt) und der Fehler (GL. 2.6) ist exakt $\sigma_k = \sqrt{\mu_k}$.

2.2 Poisson-Verteilung

Wir betrachten die Binomialverteilung (Gl. 2.1)

$$P(k; n, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

im Grenzfall sehr vieler Experimente ($n \rightarrow \infty$) mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit für ein “positives” Resultat ($p \rightarrow 0$), wobei der Mittelwert $\mu = np$ konstant bleibt. Für $k = 1$ ist $n!/(n-k)! = n$ und für $k = 2$ gleich $n(n-1) \simeq n^2$. Allgemein gilt für $n \rightarrow \infty$ und $k \ll n$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdots (n-k+1) \rightarrow n^k$$

Für den gleichen Grenzfall lässt sich auch der dritte Faktor vereinfachen ($p = \mu/n$)

$$\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \rightarrow \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\mu}$$

Damit geht die Binomialverteilung über in die Poisson-Verteilung

$$\boxed{P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}} \quad (2.7)$$

Der Poisson-Verteilung hängt also nur von einem Parameter, dem Mittelwert μ , ab. Der Varianz ist (Gl. 2.5)

$$\boxed{\text{Varianz} = \text{Mittelwert}, \quad \sigma^2 = \mu} \quad (2.8)$$

Im Folgenden werden die Eigenschaften der Poisson-Verteilung unabhängig von der Binomialverteilung bewiesen. Der Normierung ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu} = 1$$

Der Mittelwert (Erwartungswert von k , Gl. 1.11) ist

$$\mu = E(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \mu) = \mu e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \mu$$

Das zweite Moment ist

$$\begin{aligned} E(k^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \mu) \\ &= \mu e^{-\mu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \right] = \mu(\mu + 1) \end{aligned}$$

und damit (Gl. 1.13) $\sigma^2 = E(k^2) - \mu^2 = \mu$.

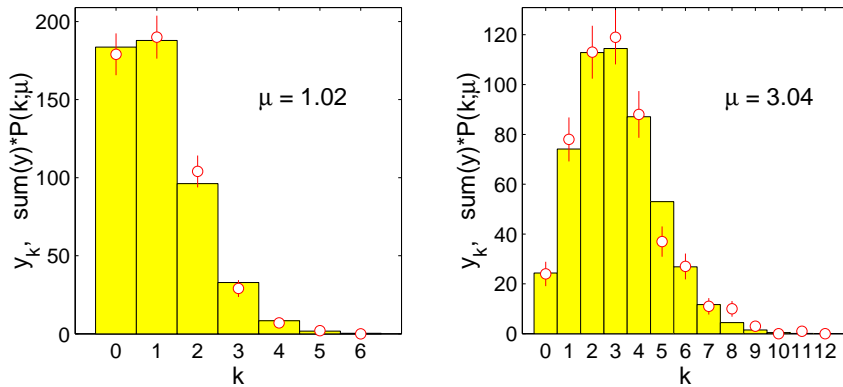


Abbildung 2.3: Poisson-Verteilungen $P(k; \mu)$ (—) verglichen mit gemessenen Verteilungen y_k (o) für $\mu = 1.02$ und $\mu = 3.04$

In Abb. 2.3 (Program 2.3) sind gemessene Verteilungen mit den entsprechenden Poisson-Verteilungen verglichen. Im Experiment wurde mit einem Detektor die γ -Strahlung einer radioaktiven Quelle gemessen. Registriert wurde die Zahl der Photonen in einem kurzen Zeitintervall. Das Experiment wurde 511 mal wiederholt (automatisch mit einem “multiscaler”). Die Zahl der Ereignisse (Photonen) schwankt zwischen 0 und 6 (siehe Programm 2.3 für die erste 20 Zahlen) und entsprechen einer Poisson-Verteilung mit $\mu = 1.02$. Eine zweite Messerie wurde mit einer etwa 3 mal stärkeren Quelle durchgeführt (siehe Abb. 2.3). Für einen Mittelwert $\mu = 1$ sind die Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1 Ereignis zu beobachten gleich gross $P(0; 1) = P(1; 1) = 36.8\%$. Allgemein gilt für $\mu = n$ mit n ganzzahlig $P(n-1; n) = P(n; n)$.

Als Beispiel sind in der Funktion `poisson(n,lambda)` sowohl die Funktionsargumente als auch der Parameter als Vektoren definiert. Man kann also auf einmal

zwei Poisson-Verteilungen berechnen (siehe Programm 2.3).

```

%-----
%   MATLAB program 2.3: Measured and calculated Poisson distributions
%   -----
load Pdata2                                % output of multi scaler
data = Pdata2;                              m = mean(data)
x = 0:max(data)+1;                          y = hist(data,x);
theory = sum(y)*poisson(x,m);               b = bar(x,theory,1);
set(b,'FaceColor','y');                     axis square
hold on,                                    plot_data([x' y'],'r')
axis([-1 max(data)+2 0 1.1*max(y)]),
xlabel('k','FontSize',14),
ylabel('y_k, sum(y)*P(k;\mu)','FontSize',14)
txt = sprintf('%4.2f',m);
text(0.7*max(data),0.8*max(y),['\mu ' txt],'FontSize',14)

%-----
function p = poisson(n,lambda)
% poisson distribution: calculates the probability to observe n events
% if the mean value is lambda; both n and lambda can be vectors
k = length(n);
p = zeros(k,length(lambda));
for i = 1:k
    p(i,:) = lambda.^n(i) .* exp(-lambda) / gamma(n(i)+1);
end

%-----
>> data(1:10) = 0    2    1    2    1    0    0    0    0    1
>> data(11:20) = 1    1    2    1    1    1    1    2    0    1
%-----
>> poisson(0:8,[1 3])
ans =
    0.3679    0.0498
    0.3679    0.1494
    0.1839    0.2240
    0.0613    0.2240
    0.0153    0.1680
    0.0031    0.1008
    0.0005    0.0504
    0.0001    0.0216
    0.0000    0.0081
%-----

```

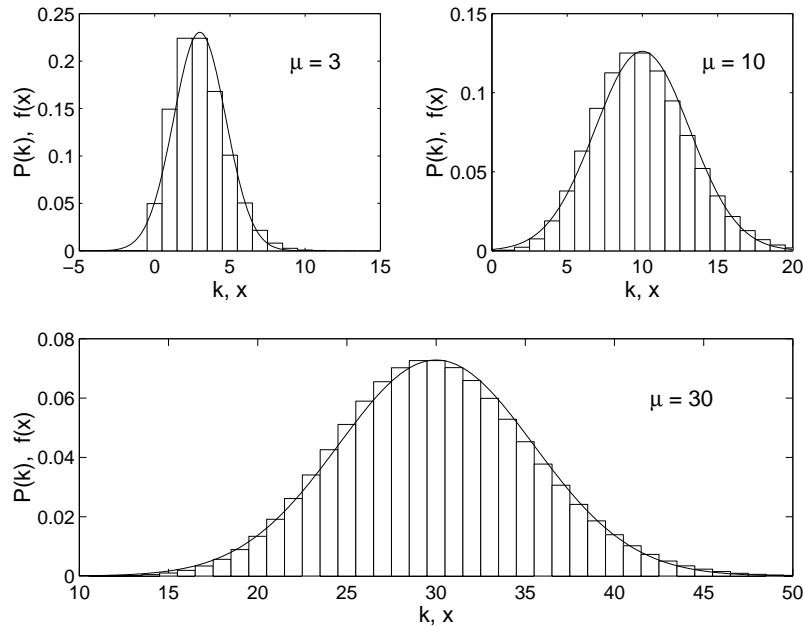


Abbildung 2.4: Der Poisson-Verteilung $P(k)$ verglichen mit der Gauss-Verteilung $f(x)$ für $\mu = 3, 10$ und 30

Die Poisson-Verteilung ist auch ausserhalb der Kern- und Teilchenphysik wichtig um die beobachtete Verteilung seltener Ereignisse zu verstehen. Das klassische Beispiel ist die Statistik über die Zahl der durch Huftritte getöteten preussischen Soldaten aus dem letzten Jahrhundert [Barl 89]. Die Gesamtzahl der Toten in 10 Armeekorps in 20 Jahren war 122. Der Mittelwert für einen Korps in einem Jahr ist also $\mu = 122/200 = 0.61$. Die Wahrscheinlichkeit in einem Korps in einem Jahr keinen Todesfall zu haben ist $P(0; 0.61) = 0.5434$. Da das "Experiment" 200 mal durchgeführt wurde, erwartet man in $200 \times 0.5434 = 108.7$ Fällen keine Toten, was mit dem beobachteten Wert (109) übereinstimmt. Auch die Zahlen für 1, 2, 3 und 4 Toten pro Korps und Jahr (65, 22, 3 und 1) stimmen sehr gut mit den Erwartungen der Poisson-Verteilung überein (66.3, 20.2, 4.1 und 0.6).

In Abb. 2.4 sind verschiedene Poisson-Verteilungen $P(k; \mu)$ mit den entsprechenden Gauss-Verteilungen $f(x; \mu, \sqrt{\mu})$ (Gl. 1.47) verglichen. Für $\mu \geq 10$

ist die Näherung schon gut genug. Dies zeigen auch die 1σ -Konfidenzintervalle $(\mu - \sqrt{\mu}, \mu + \sqrt{\mu})$, z.B. für $\mu = 10$ ($6.8 < k < 13.2$) und $\mu = 30$ ($24.5 < k < 35.5$)

$$\sum_{k=7}^{k=13} P(k; 10) = 73.4 \% \quad \text{und} \quad \sum_{k=25}^{k=35} P(k; 30) = 68.5 \%$$

2.2.1 *Poisson-Statistik; Konfidenzintervall

Die Frage der Statistik ist, wie kann ich aus einer gemessenen Zahl n eine Schätzung für den Mittelwert μ erhalten. Dies ist für die Poisson-Statistik, im Gegensatz zur Gauss-Statistik, keine einfache Frage. Ist die Zahl n der beobachteten Ereignisse genügend gross ($n \geq 10$), so gilt in guter Näherung die Aussage der Gauss-Statistik: Mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$ überlappt das Intervall $(n - \sqrt{n}, n + \sqrt{n})$ den "wahren" Wert μ . Für kleine Werte n , $1 \leq n \leq 10$, ist diese Aussage nur grob richtig und für $n = 0$ ist sie falsch. Betrachten wir zuerst den Fall $n = 0$. Wäre $\mu = 1$, so ist die Wahrscheinlichkeit $n = 0$ Ereignisse zu beobachten $P(0; 1) = 36.8 \%$, für $\mu = 2$ ist $P(0; 2) = 13.5 \%$ und für $\mu = 3$ ist $P(0; 3) = 5.0 \%$. Die Wahrscheinlichkeit $n = 0$ Ereignisse zu messen nimmt also mit zunehmendem Wert von μ ab. Damit gilt umgekehrt, dass mit 95.0% Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau $CL = 95.0 \%$) $\mu \leq 3$ ($\mu \leq 2$ mit $CL = 86.5 \%$, $\mu \leq 1$ mit $CL = 63.2 \%$). Für ein bestimmtes Konfidenzniveau kann man also eine obere Limite für den "wahren" Wert μ angeben. Für das allgemein gebräuchliche Konfidenzniveau $CL = 90 \%$ (man nimmt also an, dass das Messergebnis keine extreme statistische Schwankung ist) gilt

$$n = 0 \Rightarrow \mu \leq 2.3 \quad \left[90 \% \text{ CL} = 1 - P(0; 2.3) = \sum_{k=1}^{\infty} P(k; 2.3) \right]$$

Allgemein kann man für n beobachtete Ereignisse die obere Limite μ^{max} (90 % CL) wie folgt (iterativ) berechnen

$$\mu \leq \mu^{max}, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} P(k; \mu^{max}) = 90 \% \quad \left[= 1 - \sum_{k=0}^n P(k; \mu^{max}) \right] \quad (2.9)$$

Für $\mu = \mu^{max}$ ist die Wahrscheinlichkeit n oder weniger Ereignisse zu beobachten 10% und für $\mu > \mu^{max}$ ist sie noch kleiner.

Die vorhergehende Betrachtung ist die allgemein akzeptierte "klassische" Überlegung (siehe z.B. [Barl 89] und [Eadi 71]). Für die Bayesianen (siehe z.B.

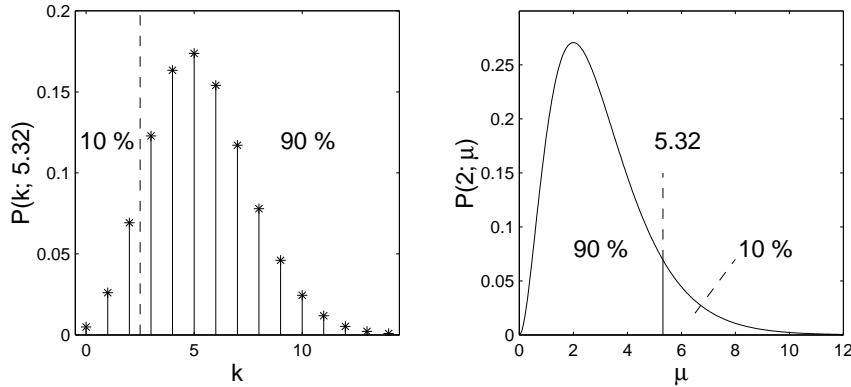


Abbildung 2.5: Die obere Limite (CL = 90 %) für einen Poisson-Prozess, wenn $n = 2$ Ereignisse beobachtet wurden. Links die “klassische” Berechnung; Rechts die Berechnung nach Bayes. Das Resultat ist für beide Rechnungen gleich: $\mu \leq 5.32$

[Cous 95]) ist $P(n; \mu)$ mit n fest und μ variabel eine Wahrscheinlichkeitsdichte² für μ . Die obere Limite ist dann

$$90 \% = \int_0^{\mu^{max}} P(n; \mu) d\mu$$

Durch partielle Integration kann man zeigen, dass dies zum gleichen Resultat führt

$$\begin{aligned} \int_0^m P(n; \mu) d\mu &= \int_0^m \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} d\mu = -\frac{m^n}{n!} e^{-m} + \int_0^m \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu} d\mu \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{m^k}{k!} e^{-m} + \int_0^m e^{-\mu} d\mu = 1 - \sum_{k=0}^n P(n; m) \end{aligned}$$

Ein grafische Darstellung beider Methoden ist in Abb. 2.5 gegeben.

Analog kann man für $n > 0$ beobachtete Ereignisse eine untere Limite μ^{min} (90 % CL) definieren

$$\mu \geq \mu^{min}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} P(k; \mu^{min}) = 90 \% \quad \left[= 1 - \sum_{k=n}^{\infty} P(k; \mu^{min}) \right] \quad (2.10)$$

Für $\mu = \mu^{min}$ ist die Wahrscheinlichkeit n oder mehr Ereignisse zu beobachten 10 % und für $\mu < \mu^{min}$ ist sie noch kleiner. Für die Bayesianen ist die untere Limite

²Dies folgt aus dem Theorem von Bayes unter der Annahme, dass die apriori Wahrscheinlichkeitsdichte eine Gleichverteilung ist.

Tabelle 2.1: Untere und obere Limite für Poisson-Prozesse, wenn n Ereignisse beobachtet wurden.

n	$n - \sqrt{n}$	$n + \sqrt{n}$	μ^{max}				
			μ^{min}	84 %	90 %	95 %	99 %
0	-	-	-	1.83	2.30	3.00	4.61
1	0	2.00	0.18	3.29	3.89	4.74	6.64
2	0.59	3.41	0.71	4.63	5.32	6.30	8.41
3	1.27	4.73	1.37	5.90	6.68	7.75	10.05
4	2.00	6.00	2.09	7.15	7.99	9.15	11.60
5	2.76	7.24	2.85	8.37	9.28	10.51	13.11
6	3.55	8.45	3.63	9.57	10.53	11.84	14.57
7	4.35	9.65	4.43	10.75	11.77	13.15	16.00
8	5.17	10.83	5.24	11.93	12.99	14.44	17.40
9	6.00	12.00	6.07	13.09	14.21	15.71	18.78
10	6.84	13.16	6.90	14.25	15.41	16.96	20.15
20	15.53	24.47	15.59	25.52	27.05	29.06	33.11
30	24.52	35.48	24.58	36.50	38.32	40.69	45.40

gegeben durch

$$10 \% = \int_0^{\mu^{min}} P(n; \mu) d\mu$$

Dies gibt einen zu hohen Wert für μ^{min} im Vergleich zur “klassischen” Definition 2.10, z.B. für $n = 2$ 1.1 statt 0.5.

In Tab. 2.1 sind für verschiedene n obere und untere Limiten gegeben. Aus den unteren und oberen Limiten bei 84 % CL erhält man das zentrale 68 % Koinfidenzintervall

$$\mu^{min}(84 \% \text{ CL}) \leq \mu \leq \mu^{max}(84 \% \text{ CL}) \quad \text{mit } 68 \% \text{ CL.}$$

In Abb. 2.6 ist ein Beispiel gegeben. Aus der Tab. 2.1 sieht man, dass für $n > 1$ in guter Näherung gilt

$$n - \sqrt{n} \leq \mu \leq n + \sqrt{n} + 1 \quad (68 \% \text{ CL}). \quad (2.11)$$

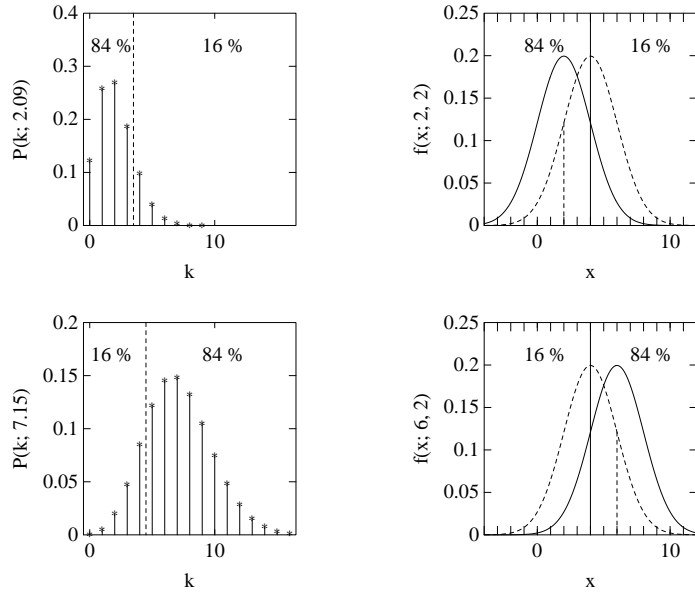


Abbildung 2.6: Konstruktion des 68 % Konfidenzintervalls aus unterer und oberer Limite (beide mit CL = 84 %). Links: Poisson-Verteilung $P(k; \mu)$. Für $n = 4$ beobachtete Ereignisse ist $2.09 \leq \mu \leq 7.15$ (CL = 68 %). Rechts (zum Vergleich): Gauss-Verteilung $f(x; \mu, \sigma)$. Für einen gemessenen Wert $x_0 = 4$ mit Fehler $\sigma = 2$ ist $2 \leq \mu \leq 6$ (CL = 68 %). Für die Gauss-Verteilung geben "klassisch" (—) und Bayes-Methode (- -) das gleiche Resultat.

2.3 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist uns als **Zeitverteilung**

$$f(t; \lambda) = \lambda e^{-\lambda t} \quad F(t; \lambda) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda t'} dt' = 1 - e^{-\lambda t} \quad F(\infty) = 1 \quad (2.12)$$

in der Kernphysik (Zerfallsgesetz der Radioaktivität) wohl bekannt (z.B. aus dem Anfängerpraktikum, Versuch RA). Der Parameter λ ist die Zerfallsrate oder Zerfallskonstante. Ein weiteres Beispiel ist die Absorption von γ -Strahlung in Materie (siehe z.B. VP-Versuch "Compton-Streuung"). Die Zahl der verbleibenden Photonen $N(x)$ nimmt mit zunehmender Dicke x des Absorbers exponentiell ab

$$N(x) = N(0) e^{-\Sigma x}$$

wobei Σ der Absorptionskoeffizient ist.

Die Exponentialverteilung beschreibt die zeitliche (oder räumliche) Verteilung seltener statistischer Prozesse. Sie ist direkt mit der Poisson-Verteilung verknüpft, wie wir am Beispiel der Zeitverteilung zeigen werden. Die erwartete Zahl der Ereignisse k in einem Zeitintervall Δt wird durch die Poisson-Verteilung $P(k; \mu)$ (Gl. 2.7) mit Mittelwert $\mu = \lambda \Delta t$ gegeben. Wir fragen jetzt nach der Wahrscheinlichkeit, dass das erste Ereignis nach einer Zeit t auftritt. Sie ist das Produkt zweier Wahrscheinlichkeiten

$$dF(t; \lambda) = P(0; \lambda t) \times P(1; \lambda dt) = e^{-\lambda t} \lambda dt = f(t; \lambda) dt \quad (dt \rightarrow 0)$$

Man beachte, dass der Zeitnullpunkt keine Bedeutung hat: zur Messung der Zeit t kann die Uhr willkürlich gestartet werden, z.B. durch ein vorhergehendes Ereignis.

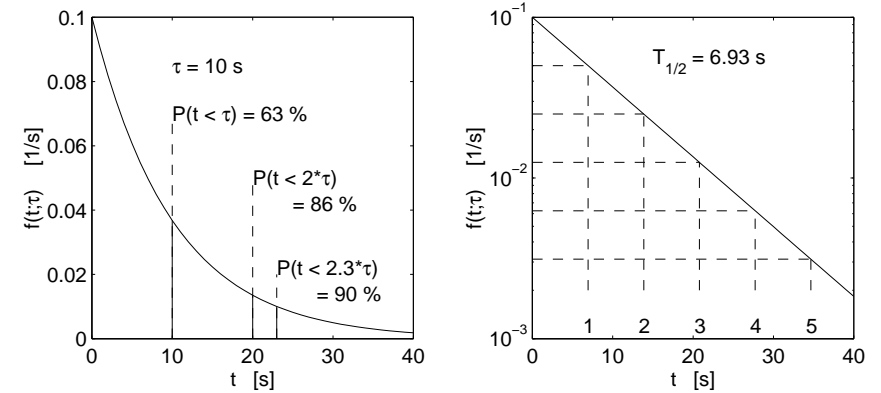


Abbildung 2.7: Exponentielle Zeitverteilung $f(t; \tau)$, $\tau = 1/\lambda$

Der Mittelwert der Zeitverteilung (Gl. 2.12) ist

$$\tau \equiv \langle t \rangle = \int_0^\infty t f(t; \lambda) dt = 1/\lambda \quad (2.13)$$

Das zweite Moment ist

$$\langle t^2 \rangle = \int_0^\infty t^2 f(t; \lambda) dt = 2/\lambda^2 = 2\tau^2$$

und die Varianz

$$\sigma^2 \equiv \langle t^2 \rangle - \tau^2 = \tau^2 \quad (2.14)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gemessene Zeit t im 1σ -Konfidenzintervall $(0, 2\tau)$ liegt ist (Abb. 2.7)

$$F(2\tau; 1/\tau) = 1 - e^{-2} = 86.5\%$$

Mit 90% Wahrscheinlichkeit (CL = 90 %) ist t innerhalb $(0, 2.3\tau)$, d.h. $t < 2.3\tau$. Umgekehrt gilt, dass wenn kein Zerfall in der Zeit t beobachtet wird mit 90% Wahrscheinlichkeit $\tau > t/2.3$ ist (vergleiche die Diskussion in Kap. 2.2.1). Als Beispiel die Suche nach dem Protonzerfall (Nukleonzerfall): $p \rightarrow e^+\pi^0$ und $n \rightarrow e^+\pi^-$, $e^-\pi^+$. In einem Cherenkov-Detektor von 1000 t Wasser wurde ein Jahr lang nach diesen Zerfällen gesucht, aber nichts gefunden. Die Zahl der betrachteten Nukleonen ist $n = (10^9/M) N_A A = 6 \times 10^{32}$ (H_2O : Molgewicht $M = 18$ g und $A = 18$ Nukleonen pro Molekül). Nun ist es gleichwertig, ob man ein Nukleon n Jahre untersucht (Lebensdauer des Universums $\simeq 2 \times 10^{10}$ Jahre) oder n Nukleonen 1 Jahr. Die untere Limite für die Lebensdauer des Nukleons ist damit

$$\tau_N \geq n/2.3 = 2.6 \times 10^{32} \text{ Jahre (CL = 90 \%)}.$$

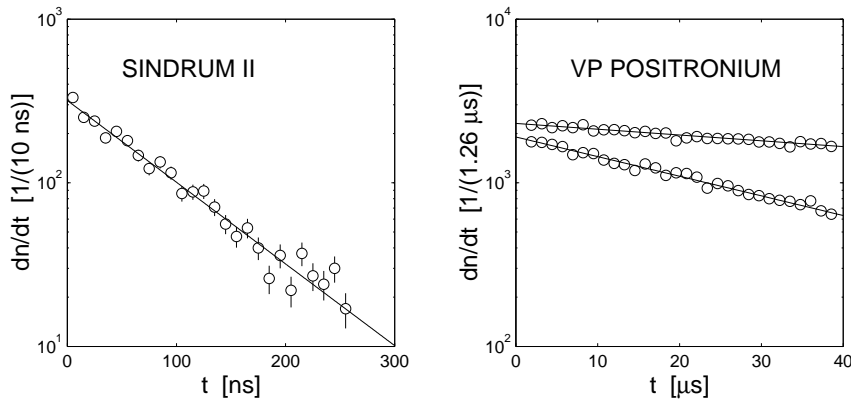


Abbildung 2.8: Exponentielle Zeitverteilungen. Die Zeit t zwischen zufälligen Ereignissen wurde gemessen.

Exponentielle Zeitverteilungen kommen sowohl als Verteilungen von Zerfallszeiten ($\tau =$ Lebensdauer, $\lambda =$ Zerfallsrate) als auch als Verteilungen von Zeitabständen zwischen statistischen Ereignissen ($\tau =$ mittlere Zeitabstand, $\lambda =$ Zählrate) in den Experimentalphysik häufig vor. Im SINDRUM-II-Detektor

wurde die Rate der einfallenden Muonen bestimmt, indem die Zeit zwischen einem Muonsignal im Strahlzähler und einem zufälligen Signal im Hodoskop gemessen wurde. Diese zufällige Signale werden durch die kosmische Strahlung verursacht (dieser Signalrate ist wesentlich kleiner als die Muonrate). Das resultierende Zeitspektrum ist eine Exponentialverteilung (Abb. 2.8, Programm 2.4) mit $\tau = 87$ ns. Die Rate der einfallenden Muonen ist somit $10^9/87 = 1.15 \times 10^7/\text{s}$. Auch im VP werden Zeitspektren gemessen, z.B. im Versuch "Positronium". Als Beispiel (Abb. 2.8) wurde die Zeit zwischen einem Ereignis im Detektor 1 (Start, sehr kleine Rate) und einem zufälligen Ereignis im Detektor 2 (Stop, hohe Rate) gemessen. An die resultierenden Zeitverteilungen wurden Exponentialfunktionen angepasst (siehe Kap. 4.2.1) und die erhaltenen Werte für τ 123 und $36.2 \mu\text{s}$ stimmen mit den direkt gemessenen Stoppraten (8100/s bzw. 27630/s) überein.

```

%-----
%   MATLAB program 2.4: accidental time spectrum
%   -----
load MuonAcc,                % accidental muons in SINDRUM
logplot_data(MuonAcc),       hold on
x = 0:300;                   tau = 87
n0 = 318,                    semilogy(x,n0*exp(-x/tau),'g-')
text(50,500,'SINDRUM II')   ylabel('dn/dt [1/(10 ns)]')
xlabel('t [ns]'),
%-----

```

2.3.1 *Totzeit

Bei der Messung von statistischen Ereignissen muss die Totzeit der Apparatur berücksichtigt werden. Nach der Registrierung eines Ereignisses ist die Apparatur für eine gewisse Zeit Δt tot, d.h. ein zweites Ereignis innerhalb Δt wird nicht registriert. Man unterscheidet zwei Arten von Totzeiten (Abb. 2.9, Programm 2.5): (i) Die Totzeit Δt ist konstant und wird durch ein zweites Ereignis innerhalb Δt nicht beeinflusst (Apparatur ist nicht paralisierbar). (ii) Die Apparatur ist paralisierbar, ein zweites Ereignis t_2 innerhalb der Totzeit $t_2 < t_1 + \Delta t$ wird nicht registriert, aber verlängert die Totzeit auf $t_2 - t_1 + \Delta t$. Durch die Totzeit ist die Zahl der registrierten Teilchen (Ereignisse) N in einer Zeit t ("real time") kleiner als die Zahl der auf dem Detektorsystem einfallende Teilchen n . Bei der nicht paralisierbaren Totzeit ist die effektive Messzeit $t' = t - N \Delta t$ ("live time"). Die Rate der einfallenden Teilchen ist

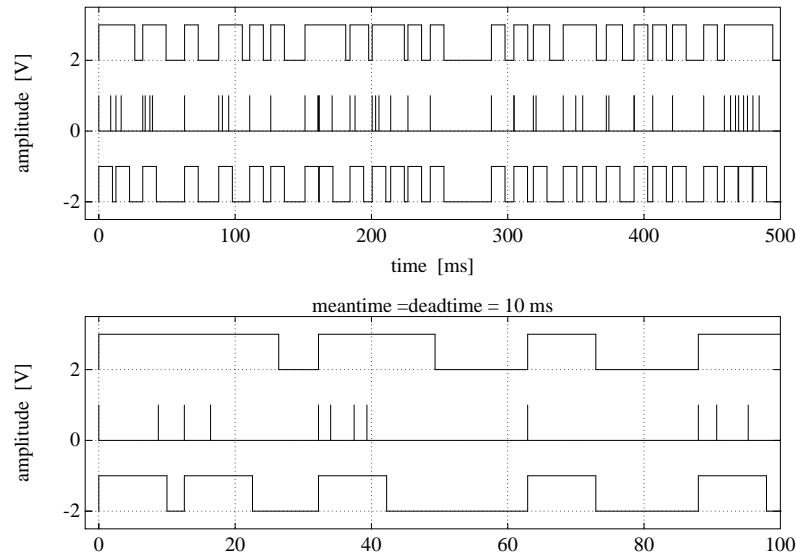


Abbildung 2.9: Responz zweier Detektorsysteme (Totzeit 10 ms, -2: nicht paralysierbar, 2: paralysierbar) auf eine stochastische Ereignisfolge (0, mittlerer Zeitabstand 10 ms).

damit

$$r = \frac{n}{t} = \frac{N}{t - N \Delta t} = \frac{R}{1 - R \Delta t} \quad (2.15)$$

Die gemessene Rate $R = N/t$ geht mit zunehmender r gegen eine Konstante (Abb. 2.10)

$$R = \frac{r}{1 + r \Delta t} \rightarrow \frac{1}{\Delta t} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

und die Varianz $\sigma_R^2 = \sigma_N^2/t^2$ gegen Null ([Cohn 66])

$$\sigma_N^2 = \frac{N}{(1 + r \Delta t)^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

```

%-----
%   MATLAB program 2.5: deadtime
%   -----
y0 = 0;
y2 = 2;
lambda = 0.1;
data = -log(rand(1,n+10))/lambda;
dt = 1/lambda;
axis([-10 n/lambda -2.5 3.5]),
hold on,
plot([ta ta],[y1 y1+dy]),
plot([ta ta+dt],[y1+dy y1+dy]),
t = ta;
Dt = dt;
n1 = 0;
n2 = 0;
for i=1:n+10
    tb = t + data(i);
    n1 = n1+1;
    t = tb;
    if tb > ta+dt
        plot([tb tb],[y1 y1+dy]),
        plot([tb tb+dt],[y1+dy y1+dy]),
        ta = tb;
    end
    if tb > Ta+Dt
        plot([Ta Ta],[y2 y2+dy]),
        plot([Ta Ta+Dt],[y2+dy y2+dy]),
        Ta = tb;
    end
    Dt = dt+tb-Ta;
end
%-----

```

Bei der paralysierbaren Totzeit wird nur dann ein Teilchen registriert, wenn vorher während einer Zeit Δt kein Teilchen auf dem Detektor eingefallen ist (siehe Abb. 2.9). Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $P(0; r \Delta t)$ (Gl. 2.7). Die gemessene Rate ist damit

$$R = r \exp(-r \Delta t) \rightarrow \begin{cases} \frac{r}{1 + r \Delta t} & \text{für } r \rightarrow 0 \\ 0 & \text{für } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.18)$$

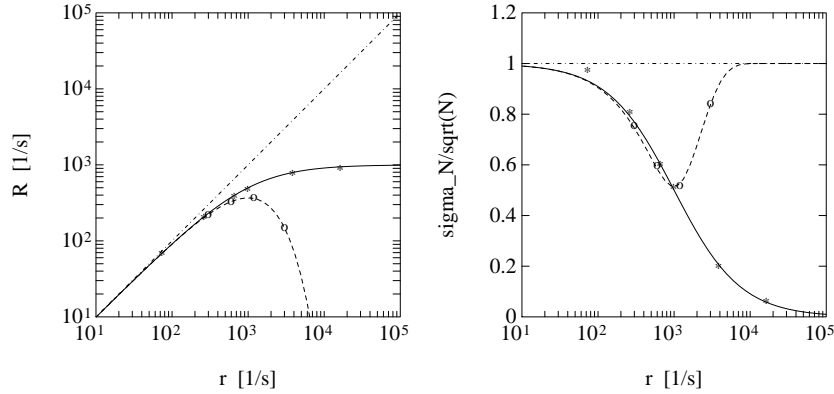


Abbildung 2.10: Erwartete Responz zweier Detektorsysteme (Totzeit 1 ms, — nicht paralysierbar, - - paralysierbar) auf eine einfallende Teilchenrate r , verglichen mit gemessenen Daten (*, bzw. o)

Die Varianz ist ([Cohn 66])

$$\sigma_N^2 = N [1 - 2r \Delta t \exp(-r \Delta t)] \quad (2.19)$$

Für $r = 1/\Delta t$ ist die gemessene Rate R maximal und die normierte Varianz σ_N^2/N minimal.

Für beide Arten von Totzeit sind in Abb. 2.10 gemessene Daten mit den theoretischen Erwartungen verglichen. Die Daten der Abb. 1.8 wurde mit einem Detektorsystem mit einer paralysierbaren Totzeit $\Delta t = 0.5$ ms und eine Rate der einfallenden Teilchen von $r = 1200$ /s gemessen. Die erwartete Zahl N der in $1/10$ s registrierten Teilchen und deren Fehler sind (Gln. 2.18, 2.19)

$$N = 120 \exp(-0.6) = 66 \quad \sigma_N = \sqrt{N [1 - 1.2 \exp(-0.6)]} = 4.7$$

in Übereinstimmung mit den gemessenen Werten.

2.4 χ^2 -Verteilung

Sind $z_1 \cdots z_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 = 1$, so ist die Zufallsvariable³

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad (2.20)$$

nach einer χ^2 -Verteilung mit n Freiheitsgraden (“dof = degrees of freedom”) verteilt (siehe z.B. [Bran 99])

$$f(\chi^2; n) = \frac{(\chi^2)^{n/2-1} e^{-\chi^2/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \quad (2.21)$$

Der Erwartungswert und die Varianz sind

$$\langle \chi^2 \rangle = n \quad \sigma_{\chi^2}^2 = 2n \quad (2.22)$$

wie man am leichtesten mit der Definition von χ^2 zeigt ($\langle z_i^2 \rangle = \sigma^2 = 1$):

$$\langle \chi^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle z_i^2 \rangle = n$$

und ($\langle z_i^4 \rangle = 3\sigma^4 = 3$, $\langle z_i^2 z_k^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle \langle z_k^2 \rangle = 1$)

$$\langle (\chi^2)^2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{k=1}^n z_k^2 \right\rangle = \sum_i \langle z_i^4 \rangle + \sum_i \sum_{k \neq i} \langle z_i^2 z_k^2 \rangle = 3n + n(n-1)$$

und damit

$$\sigma_{\chi^2}^2 = \langle (\chi^2)^2 \rangle - \langle \chi^2 \rangle^2 = 2n$$

Die χ^2 -Verteilung kann die wichtige Frage, wie gut passt eine Theoriefunktion $f(x; \vec{a})$ zu den gemessene Daten x_i , beantworten. Die Daten x_i sind mit den Fehlern σ_i gemessen. Die Mittelwerte (Erwartungswerte) werden von den Theorie bestimmt: $\langle x_i \rangle = f(x_i; \vec{a}) \equiv f_i(\vec{a})$. Die Zufallsvariable $(x_i - f_i)/\sigma_i$ entspricht im allgemeinen (Zentraler Grenzwertsatz, Kap. 3.3.2) einer standardisierten Gauss-Verteilung und damit die Variable

$$\chi^2(\vec{a}) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - f_i(\vec{a}))^2}{\sigma_i^2} \quad (2.23)$$

³ χ^2 ist die Name einer Variable und *nicht* das Quadrat einer Variable χ

einer χ^2 -Verteilung. Sind die m Parameter $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ der Theoriefunktion aus den gleichen Daten bestimmt (z.B. mit der Methode der kleinsten Quadrate, Kap. 4.2.1), so verringt sich der Zahl der Freiheitsgraden um m . Mittelwert und Varianz sind in diesem Fall

$$\langle \chi^2(\vec{a}) \rangle = n - m \quad \sigma_{\chi^2}^2 = 2(n - m) \quad (2.24)$$

Ein einfaches Beispiel haben wir schon im Kap. 1.3.5 kennengelernt: Der gewichtete Mittelwert ($\bar{x} = f_i, m = 1$) von $n = 9$ Messungen x_i (Lebensdauer des Neutrons) ergab $\chi_0^2 = 12.3$, was mehr als $1\sigma = \sqrt{2(n - m)} = 4$ grösser als der Erwartungswert $n - m = 8$ ist. Mit Hilfe der χ^2 -Verteilung können wir berechnen, wie wahrscheinlich es ist, diesen oder einen noch grösseren Wert für χ^2 zu erhalten (Abb. 2.11; $d = n - m$)

$$P(\chi^2 \geq \chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^{\infty} \frac{s^{d/2-1} e^{-s/2}}{2^{d/2} \Gamma(d/2)} ds = 1 - F(\chi_0^2/2, d/2) \quad (2.25)$$

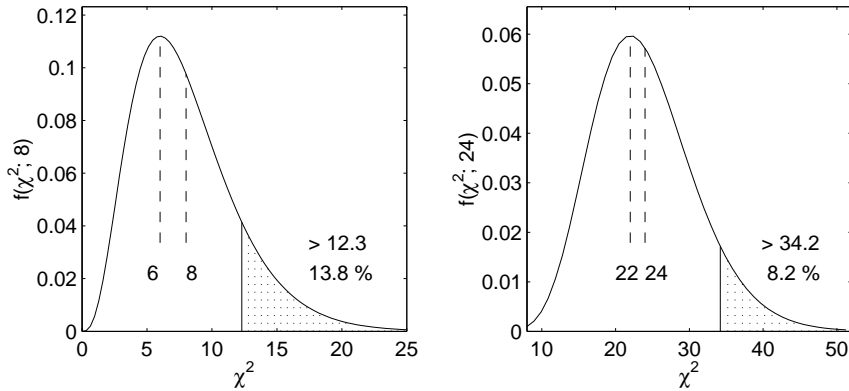


Abbildung 2.11: χ^2 -Verteilungen für $d = 8$ und $d = 24$ Freiheitsgraden. Der wahrscheinlichste Wert ($d - 2$) und der Mittelwert d sind angegeben und die Wahrscheinlichkeit einen Wert grösser als einen bestimmten Wert (12.3 bzw. 34.2) zu erhalten.

Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (= x! \text{ für } x \text{ ganzzahlig})$$

und die unvollständige Gamma-Funktion

$$F(x, a) \equiv \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt / \Gamma(a)$$

sind im MATLAB-Toolbox vorhanden: $\text{gamma}(x) = \Gamma(x)$ und $\text{gammainc}(x,a) = F(x, a)$. Die Funktion $\text{Pchisqr}(d,x)$ in der Statistics-Toolbox ist equivalent mit der Funktion $1 - \text{gammainc}(x/2,d/2)$ und berechnet $P(\chi^2 \geq x)$ für d Freiheitsgrade, z.B. $p = \text{Pchisqr}(8,12.3)$ ergibt $p = 0.1383$ (siehe Abb. 2.11). Weitere Beispiele sind in Program 2.6 und Abb. 2.11 gegeben (siehe auch die Abb. 1.2 und 2.8).

```

%-----
%   MATLAB program 2.6: chi^2
%   -----
load Pix_ratio,                x = Pix_ratio(:,1);
y = Pix_ratio(:,2);           sig = Pix_ratio(:,3);
a = [5.7 0.68 0.7];          %optimize these values!
fx = 1 - a(3)*(1 - a(2)) ./ ((x - a(1)).^2 + a(3));
chi2 = sum((y - fx).^2 ./ sig.^2), d = length(x) - length(a),
prob = Pchisqr(d,chi2)
load MuonAcc,
t = MuonAcc(:,1);            yt = MuonAcc(:,2);
a = [318 87];                %optimize these values!
ft = a(1)*exp(-t/a(2));      chi2 = sum((yt-ft).^2 ./ yt)
d = length(t) - length(a),   prob = Pchisqr(d,chi2)

%-----
%   output:      chi2 = 20.1,      d = 11,      probability = 4.4 %
%                chi2 = 34.2,      d = 24,      probability = 8.2 %
%-----

```

Hat der beobachtete χ^2 -Wert ein Konfidenzniveau $CL = 20\%$ oder mehr, ist die Theorie mit den Daten verträglich. Bei einem $CL = 5\%$ oder weniger, könnte es an der falschen Theorie liegen, oder die Fehler der Daten sind zu klein, z.B. weil ein systematischer Fehler nicht berücksichtigt wurde. Letzteres ist offenbar im ersten Beispiel des Programms 2.6 der Fall: die Messwerte streuen zufällig um die Theoriefunktion, aber die Schwankungen sind grösser als die Fehler (siehe Abb. 1.2). Bei einem sehr kleinen Wert von χ^2 mit entsprechend hohem Konfidenzniveau sind dagegen die Fehler der Daten wahrscheinlich zu gross.

2.5 Lorentz-Verteilung

Die Lorentz-Verteilung

$$f(E; E_0, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (2.26)$$

haben wir schon in Kap. 1.2 (Abb. 1.2) kennengelernt. Sie beschreibt eine Resonanzkurve, z.B. eine Spektrallinie in der Atomphysik, wobei E_0 die mittlere Energie des emittierten Photons ist und Γ die natürliche Linienbreite. In der Kern- und Teilchenphysik ist die Lorentz-Verteilung als **Breit-Wigner-Resonanz** bekannt. Das spezielle an der Lorentz-Verteilung ist die unendliche Varianz, $\sigma^2 = \infty$. Der zweite Parameter, neben dem Mittelwert E_0 ist deshalb die Halbwertsbreite $\Gamma = \text{FWHM}$. Im Abb. 2.12 ist die Lorentz-Verteilung mit einer Gauss-Verteilung, die den gleichen Mittelwert und Halbwertsbreite hat, verglichen.

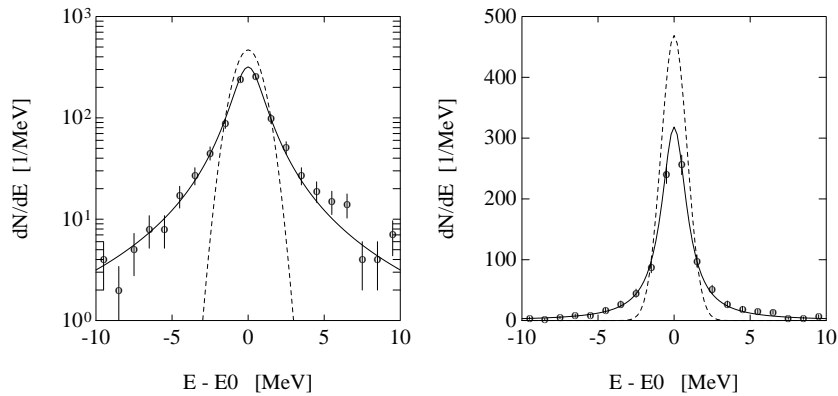


Abbildung 2.12: Monte-Carlo-Daten, die einer Lorentz-Verteilung (—) mit einer Halbwertsbreite $\Gamma = 2$ MeV entsprechen. Zum Vergleich ist auch eine Gauss-Verteilung (- -) mit der gleichen Halbwertsbreite und Fläche gegeben.