Universität Zürich[UZH]

Datenanalyse
(PHY231)
Herbstsemester 2017

Olaf Steinkamp

36-J-05 olafs@physik.uzh.ch 044 63 55763

Vorlesungsprogramm

- **Einführung, Messunsicherheiten, Darstellung von Messdaten**
- **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**
  - Mittelwert, Standardabweichung, Kovarianz und Korrelation
- **Fehlerfortpflanzungsgesetz**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
  - diskrete Verteilungen, kontinuierliche Verteilungen
  - zentraler Grenzwertsatz
- **Monte-Carlo Methode**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen II**
  - Faltung zweier Verteilungen
  - Verteilungen zweier Variablen
- **Stichproben und Schätzfunktionen**
  - Maximum-Likelihood Methode
  - Methode der kleinsten Quadrate
- **Interpretation von Messergebnissen**
  - Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen

Beispielprogramme im Verzeichnis
`/disk/puma/da/vorl/ffp`

Unsicherheit auf einer Funktion *f(x)*

Annahme: Messunsicherheit σ_x auf der Größe *x* nicht zu groß

- Abweichungen der Messwerte x_i vom Mittelwert $\bar{x}$ sind nicht zu groß
- Ansatz: lineare Näherung für *f(x)* um $f(\bar{x})$

$$f(x_i) \approx f(\bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \cdot (x_i - \bar{x})$$

- Mittelwert der Funktionswerte

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} f(x_i) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})}_{=0} = f(\bar{x})$$

- Varianz der Funktionswerte

$$V(f) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - \overline{f(x)}\right)^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - f(\bar{x})\right)^2 = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}_{=V(x)}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\sigma_f \equiv \sqrt{V(f)} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \sigma_x}$$

Unsicherheit auf einer Funktion *f(x,y)*

Messunsicherheiten σ_x und σ_y seien nicht zu groß → lineare Näherung

$$f(x_i, y_i) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} \cdot (x_i - \bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} \cdot (y_i - \bar{y})$$

- **Varianz der Funktionswerte**

$$V(f) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i, y_i) - \overline{f(x_i, y_i)} \right)^2 \qquad \Bigg| \qquad \overline{f(x, y)} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i, y_i) - f(\bar{x}, \bar{y}) \right)^2$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} (y_i - \bar{y}) \right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2}_{V(x)} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum (y_i - \bar{y})^2}_{V(y)} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}_{cov(x,y)}$$

$$= \boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \sigma_y^2} \boxed{+ 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot cov(x, y)}$$

(Gaußsche Fehlerfortpflanzung)

Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Spezialfall: nur wenn keine Korrelation zwischen den Variablen !!!

$$cov(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}$$

- **Gaußsche Fehlerfortpflanzung gilt NICHT wenn *x* und *y* korreliert sind**
  - **z.B. bei gemeinsamen systematischen Messunsicherheiten**
    - *x* und *y* sind zwei Längen und wurden mit demselben Maßstab gemessen
  - **z.B. bei Abhängigkeit von gemeinsamen Parametern**
    - *x* und *y* wurden mit zwei unterschiedlichen Messgeräten gemessen, aber die Eichung beider Messgeräte hängt von der Temperatur bei der Messung ab
- Vernachlässigen des Kovarianzterms kann zu grob falscher Misseinschätzung der Unsicherheit auf *f(x,y)* führen

x und *y* positiv korreliert → Unsicherheit auf *f(x,y)* zu klein geschätzt
x und *y* negativ korreliert → Unsicherheit auf *f(x,y)* zu gross geschätzt

Eine Funktion mehrerer korrelierter Messgrößen

Funktion $f(x_1, x_2)$ von zwei korrelierten Messgrößen x_1 und x_2

$$V(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot V(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot V(x_2) + 2\,\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot cov(x_1, x_2)$$

- **oder**

$$V(f) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot cov(x_i, x_j)$$

- **weil**

$$cov(x_i, x_i) = \overline{x_i x_i} - \overline{x}_i \overline{x}_i = \overline{x_i^2} - (\overline{x}_i)^2 = V(x_i)$$

Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ von n korrelierten Messgrößen x_i $(i = 1, \ldots, n)$

$$\boxed{V(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot cov(x_i, x_j)}$$

Fehlerfortpflanzung in Matrixschreibweise

Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ von n korrelierten Messgrößen x_i $(i = 1,\ldots, n)$

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\cdot \mathrm{cov}(x_i,x_j)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \times \begin{pmatrix} V(x_1) & \mathrm{cov}(x_1,x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1,x_n) \\ \mathrm{cov}(x_1,x_2) & V(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2,x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_1,x_n) & \mathrm{cov}(x_2,x_n) & \cdots & V(x_n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n \end{pmatrix}$$

$$= G \times V_x \times \tilde{G}$$

- **G = Jacobi-Matrix (“Ableitungsmatrix”) der Funktion f**

$$G_i \equiv (\partial f/\partial x_i) \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

- **V_x = Kovarianzmatrix (“Fehlermatrix”) der Messgrößen x_i**

$$(V_x)_{ij} \equiv \mathrm{cov}(x_i,x_j) \qquad (i,j = 1,\ldots,n)$$

Einfaches Beispiel: Gaußsche Fehlerfortpflanzung

- **Funktion $f\,(x_1, x_2, x_3)$ dreier unkorrelierter Messgrößen x_1, x_2, x_3**
  - x_1, x_2, x_3 unkorreliert → Kovarianzmatrix diagonal

$$G = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \quad ; \quad V_x = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{x_3}^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad V(f) = G \times V_x \times \tilde{G} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \times \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{x_3}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \partial f / \partial x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \sigma_{x_3}^2 \quad ✓$$

Mehrere Funktionen mehrerer Messgrößen

N Funktionen $f_1(x_1,\ldots,x_n)$, … ,$f_N(x_1,\ldots,x_n)$ von n Messgrößen x_i ($i = 1,\ldots,n$)

- **Varianz einer Funktion f_k** (k in $1,\ldots,N$)

$$V(f_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)\cdot cov(x_i, x_j)$$

- **Kovarianz zweier Funktionen f_k und f_l** (k,l in $1,\ldots,N$)

$$cov(f_k, f_l) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_j}\right)\cdot cov(x_i, x_j) \qquad \Big| \qquad cov(f_k, f_k) = V(f_k)$$

- **aufgepasst: die Funktionen f_k und f_l hängen von denselben Messgrößen x_i ab**

im allgemeinen Korrelationen zwischen den f_k und f_l

auch wenn die Messgrößen x_i selbst untereinander unkorreliert sind

Fehlerfortpflanzung in Matrixschreibweise

Eine Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ von n korrelierten Messgrößen x_i $(i = 1,\ldots,n)$

$$V(f) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}_{G} \times \underbrace{\begin{pmatrix} V(x_1) & \cdots & cov(x_1,x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(x_1,x_n) & \cdots & V(x_n) \end{pmatrix}}_{V_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n \end{pmatrix}}_{\tilde{G}}$$

N Funktionen $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n)$ von n Messgrößen x_i $(i = 1,\ldots,n)$

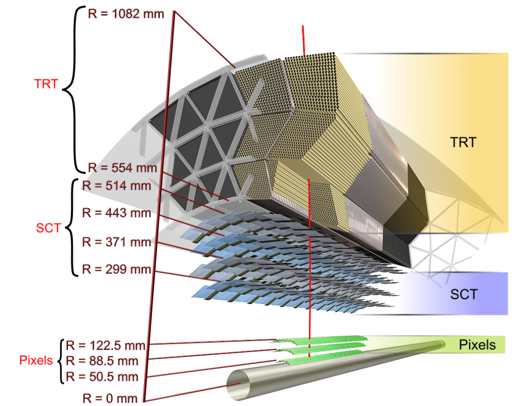
$$V_f = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{G} \times \underbrace{\begin{pmatrix} V(x_1) & \cdots & cov(x_1,x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(x_1,x_n) & \cdots & V(x_n) \end{pmatrix}}_{V_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\tilde{G}}$$

- **Kovarianzmatrix der Messgrößen x_i** $\quad (V_x)_{ij} \equiv cov(x_i,x_j) \quad (i,j = 1,\ldots,n)$
- **Jacobi-Matrix** $\quad G_{ik} \equiv \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) \quad \begin{pmatrix} i = 1,\ldots,n \\ k = 1,\ldots,N \end{pmatrix}$
- **Kovarianzmatrix der Funktionen f_k** $\quad (V_f)_{kl} \equiv cov(f_k,f_l) \quad (k,l = 1,\ldots,N)$

Beispiel Koordinatentransformation

Detektor zur Rekonstruktion der Spuren geladener Teilchen

- **messe Positionen der Teilchen in dünnen Detektorlagen**
  - Ortsmessung in Zylinderkoordinaten (r,φ,z)
  - suche Messunsicherheit in kartesischen Koordinaten (x,y,z)



- **Jacobi-Matrix:**

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Kovarianzmatrix der Messgrößen:**
  - kenne *r* aus der Position der Detektorlage
    ⇒ Unsicherheit sei vernachlässigbar klein
  - messe φ und *z* in unterschiedlichen Detektorlagen
    ⇒ Messunsicherheiten σ_φ und σ_z **unkorreliert**

$$\Rightarrow \quad V_{r\varphi z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$$

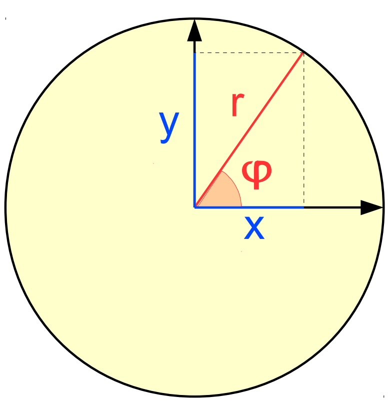
Beispiel Koordinatentransformation

$$V_{xyz} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{G} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}}^{V_{r\varphi z}} \times \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\tilde{G}}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_\varphi^2 r^2 \sin^2\varphi & -\sigma_\varphi^2 r^2 \sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ -\sigma_\varphi^2 r^2 \sin\varphi\cos\varphi & \sigma_\varphi^2 r^2 \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\varphi^2 y^2 & -\sigma_\varphi^2 x\, y & 0 \\ -\sigma_\varphi^2 x\, y & \sigma_\varphi^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$$

Qualitative Kontrolle:

- ***z* ist nicht mit *x* und *y* korreliert** ✓
- $\sigma_x \to 0$ **für** $\varphi \to 0°$ ✓ $(x \to r)$
- $\sigma_y \to 0$ **für** $\varphi \to 90°$ ✓ $(y \to r)$
- ***x* und *y* sind zu 100% antikorreliert** ✓ (messe φ)



Beispiel Systematische Unsicherheit

Gedankenexperiment: zwei Messgrößen *x* und *y* mit

- statistischen Unsicherheiten σ_x auf x und σ_y auf y $\Rightarrow$ **unkorreliert**
- gemeinsame systematische Unsicherheit S auf x und y $\Rightarrow$ **100% korreliert**

- **Ansatz: betrachte *x* und *y* jeweils als Summe zweier Beiträge**

$$x \equiv x^{\text{stat}} + x^{\text{syst}} \quad ; \quad y \equiv y^{\text{stat}} + y^{\text{syst}}$$

- x^{stat} hat statistische Unsicherheit σ_x und keine systematische Unsicherheit
- y^{stat} hat statistische Unsicherheit σ_y und keine systematische Unsicherheit
- x^{syst} , y^{syst} haben syst. Unsicherheit S und keine statistische Unsicherheit

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(x^{\text{stat}}, y^{\text{stat}}\right) &= 0 \\
\operatorname{cov}\left(x^{\text{stat}}, x^{\text{syst}}\right) &= 0 \\
\operatorname{cov}\left(x^{\text{stat}}, y^{\text{syst}}\right) &= 0 \\
\operatorname{cov}\left(x^{\text{syst}}, y^{\text{stat}}\right) &= 0 \\
\operatorname{cov}\left(x^{\text{syst}}, y^{\text{syst}}\right) &= S^2
\end{aligned}\right.$$

Beispiel Systematische Unsicherheit

Gedankenexperiment: zwei Messgrößen *x* und *y* mit

- statistischen Unsicherheiten σ_x auf *x* und σ_y auf *y* ⇒ **unkorreliert**
- gemeinsame systematische Unsicherheit *S* auf *x* und *y* ⇒ **100% korreliert**

- **Ansatz: betrachte *x* und *y* jeweils als Summe zweier Beiträge**

$$x \equiv x^{\text{stat}} + x^{\text{syst}} \quad ; \quad y \equiv y^{\text{stat}} + y^{\text{syst}}$$

- x^{stat} hat statistische Unsicherheit σ_x und keine systematische Unsicherheit
- y^{stat} hat statistische Unsicherheit σ_y und keine systematische Unsicherheit
- x^{syst} , y^{syst} haben syst. Unsicherheit S und keine statistische Unsicherheit

$$V_{x^{\text{stat}} x^{\text{syst}} y^{\text{stat}} y^{\text{syst}}} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^2 & 0 & S^2 \\ 0 & 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & S^2 & 0 & S^2 \end{pmatrix}$$

Beispiel Systematische Unsicherheit

Fehlerfortpflanzung in Matrixschreibweise

$$\left.\begin{aligned} x &= x^{\text{stat}} + x^{\text{syst}} \\ y &= y^{\text{stat}} + y^{\text{syst}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^{\text{stat}}} & \frac{\partial x}{\partial x^{\text{syst}}} & \frac{\partial x}{\partial y^{\text{stat}}} & \frac{\partial x}{\partial y^{\text{syst}}} \\ \frac{\partial y}{\partial x^{\text{stat}}} & \frac{\partial y}{\partial x^{\text{syst}}} & \frac{\partial y}{\partial y^{\text{stat}}} & \frac{\partial y}{\partial y^{\text{syst}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{xy} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{G} \times \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^2 & 0 & S^2 \\ 0 & 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & S^2 & 0 & S^2 \end{pmatrix}}^{V_{x^{\text{stat}} x^{\text{syst}} y^{\text{stat}} y^{\text{syst}}}} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\tilde{G}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ S^2 & S^2 \\ 0 & \sigma_y^2 \\ S^2 & S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + S^2 & S^2 \\ S^2 & \sigma_y^2 + S^2 \end{pmatrix}$$

Beispiel Systematische Unsicherheit

Rechnung “per Hand”

$$V(x) = \overbrace{\overline{\left(x^{stat}+x^{syst}\right)^2}}^{\overline{x^2}} - \overbrace{\left(\overline{x^{stat}+x^{syst}}\right)^2}^{\overline{x}^2}$$

$$= \underbrace{\overline{\left(x^{stat}\right)^2} - \left(\overline{x^{stat}}\right)^2}_{=\sigma_x^2} + 2\underbrace{\left(\overline{x^{stat}\,x^{syst}} - \overline{x^{stat}}\;\overline{x^{syst}}\right)}_{=0} + \underbrace{\overline{\left(x^{syst}\right)^2} - \left(\overline{x^{syst}}\right)^2}_{=S^2} = \sigma_x^2 + S^2$$

$V(y)$ **entsprechend …**

$$cov(x,y) = \overbrace{\overline{\left(x^{stat}+x^{syst}\right)\left(y^{stat}+y^{syst}\right)}}^{\overline{x\,y}} - \overbrace{\left(\overline{x^{stat}+x^{syst}}\right)\cdot\left(\overline{y^{stat}+y^{syst}}\right)}^{\overline{x}\;\overline{y}}$$

$$= \underbrace{\overline{x^{stat}\,y^{stat}} - \overline{x^{stat}}\;\overline{y^{stat}}}_{=0} + \underbrace{\overline{x^{stat}\,y^{syst}} - \overline{x^{stat}}\;\overline{y^{syst}}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\overline{x^{syst}\,y^{stat}} - \overline{x^{syst}}\;\overline{y^{stat}}}_{=0} + \underbrace{\overline{x^{syst}\,y^{syst}} - \overline{x^{syst}}\;\overline{y^{syst}}}_{=cov\left(x^{syst},\,y^{syst}\right)=S^2} = S^2$$

Zusammenfassung

Gaußsche Fehlerfortpflanzung gilt nur für unkorrelierte Messgrößen

- gilt z.B. NICHT bei gemeinsamen systematischen Messunsicherheiten
- gilt z.B. NICHT bei Abhängigkeit von gemeinsamen Parametern

Lineare Fehlerfortpflanzung mit korrelierten Messgrößen:

$$V_f = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{G} \times \underbrace{\begin{pmatrix} V(x_1) & \cdots & cov(x_1,x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(x_1,x_n) & \cdots & V(x_n) \end{pmatrix}}_{V_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\tilde{G}}$$

- Kovarianzmatrix der Messgrößen x_i $\quad (V_x)_{ij} \equiv cov(x_i, x_j) \quad (i, j = 1, \ldots, n)$
- Jacobi-Matrix $\quad G_{ik} \equiv \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, N \end{pmatrix}$
- Kovarianzmatrix der Funktionen f_k $\quad (V_f)_{kl} \equiv cov(f_k, f_l) \quad (k, l = 1, \ldots, N)$