Datenanalyse

(PHY231)

Herbstsemester 2017

Olaf Steinkamp

36-J-05 olafs@physik.uzh.ch 044 63 55763

Vorlesungsprogramm

- **Einführung, Messunsicherheiten, Darstellung von Messdaten**
- **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**
  - Mittelwert, Standardabweichung, Kovarianz und Korrelation
- **Fehlerfortpflanzungsgesetz**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
  - diskrete Verteilungen, kontinuierliche Verteilungen
  - zentraler Grenzwertsatz
- **Monte-Carlo Methode**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen II**
  - Faltung zweier Verteilungen
  - Verteilungen zweier Variablen
- **Stichproben und Schätzfunktionen**
  - Maximum-Likelihood Methode
  - Methode der kleinsten Quadrate
- **Interpretation von Messergebnissen**
  - Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen

Beispielprogramme im Verzeichnis
`/disk/puma/da/vorl/hypo`

Testen von Hypothesen

<u>**Grundsätzlich zwei Gründe ein Experiment durchzuführen**</u>

- **will Parameter einer bestehenden Theorie (**genauer**) bestimmen**
  - z.B. mittlere Lebensdauer des Neutrons, Ruhemasse von Neutrinos
- **Konfidenzintervalle → letzte Woche**
- **will eine bestehende Theorie widerlegen**
  - suche nach Effekten, die mit der Theorie nicht vereinbar sind
  - z.B. Protonenzerfall, neue Elementarteilchen
- **Testen von Hypothesen (**z.B. "Theorie ist korrekt"**):**
  - bestimme Kompatibilität der Hypothese mit dem Ergebnis der Messung
  - Wahrscheinlichkeit, dieses Ergebnis zu erhalten, wenn die Hypothese korrekt ist
- **Dilemma: kann Hypothesen grundsätzlich nur widerlegen, aber nicht beweisen**
  - Ansatz: stelle die entgegengesetzte Hypothese auf ("Nullhypothese") und teste deren Kompatibilität mit dem Ergebnis der Messung

Testen von Hypothesen

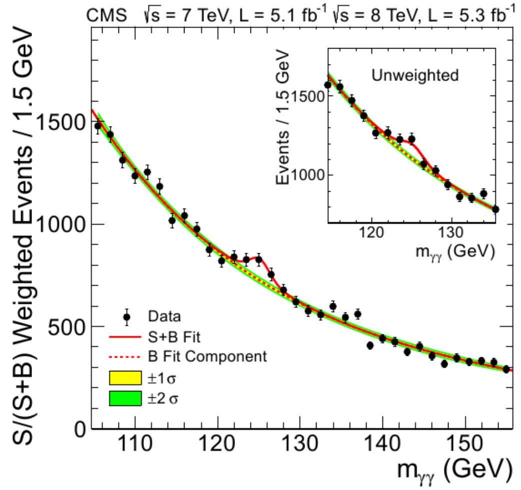
Zwei Arten von Fehlern beim Testen von Hypothesen:

Hypothese	Entscheidung	
	akzeptiere	verwerfe
wahr	"Signifikanz" des Tests $= 1 - \alpha$	**Typ I Fehler** Wahrscheinlichkeit $= \alpha$
falsch	**Typ II Fehler** Wahrscheinlichkeit $= \beta$	"Sensitivität" des Tests $= 1 - \beta$

- **wie immer ein Kompromiss:**
  - lockere Akzeptanzkriterien → hohe Signifikanz aber niedrige Sensitivität
  - strikte Akzeptanzkriterien → hohe Sensitivität aber niedrige Signifikanz

Entscheidungskriterien sollten VOR der Durchführung des Experiments festgelegt werden

Vermute Higgsteilchen mit Masse 125 GeV



- **selektiere Ereignisse mit zwei hoch-energetischen Photonen und berechne deren invariante Masse $m_{\gamma\gamma}$**
  - beobachte 2000 Ereignisse mit 120 GeV < $m_{\gamma\gamma}$ < 130 GeV
  - erwarte in diesem Intervall 1810 zufällige Ereignisse
- **"Nullhypothese": kein Higgsteilchen mit Masse 125 GeV**
  - Anzahl zufälliger Ereignisse: poissonverteilt mit μ = 1810 und $\sigma = \sqrt{1810} \approx 43$
  - Anzahl beobachteter Ereignisse: Ueberschuss von $(2000 - 1810) / \sqrt{1810} \approx 4.5\,\sigma$
- **bestimme Wahrscheinlichkeit *P* für zufälligen Ueberschuss von ≥ 4.5 σ :**
  - mit gaußscher Näherung: $P\,(\,x - \mu \geq 4.5\,\sigma) = 3.4 \times 10^{-6}$
  - Nullhypothese mit 99.9999966 % Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen

Teilchenphysik: Diskrepanz > 3 σ → "evidence", Diskrepanz > 5 σ → "discovery"

Beispiel Güte der Anpassung: χ^2-Test

Beschreibt die Funktion $f(x)$ meine Daten ?

- **Datensatz bestehe aus N Wertepaaren (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$**
  - Unsicherheiten σ_i auf den y_i , Unsicherheiten auf den x_i vernachlässigbar klein
- **Nullhypothese: die Funktion $f(x)$ gibt adäquate Beschreibung der Wertepaare**
  - beobachtete y_i sind innerhalb der Unsicherheiten σ_i mit erwarteten $f(x_i)$ vereinbar

Test der Nullhypothese: berechne χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2$$

, wenn die y_i unkorreliert sind

$$\chi^2 = (\vec{y} - \vec{f})^T \cdot V_{\vec{y}}^{-1} \cdot (\vec{y} - \vec{f})$$

, wenn die y_i miteinander korreliert sind

- **für rein statistische Fluktuationen erwarte im Mittel $\chi^2 / n_f = 1$**
- **$\chi^2 \gg n_f \rightarrow$ kleine Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese korrekt ist**

χ^2-Wahrscheinlichkeit

Erinnerung: für gaußverteilte Abweichungen auf den y_i

$$p(\chi^2 \mid n_f) \;=\; \frac{2^{-n_f/2}}{\Gamma(n_f/2)} \cdot \chi^{n_f-2} \cdot e^{-\chi^2/2}$$

- **Erwartungswert: $\langle\chi^2\rangle = n_f$; Varianz: $V(\chi^2) = 2\,n_f$**
    - $n_f = N$, wenn die Funktion $f(x)$ fest vorgegeben ist
    - $n_f = N - n$, wenn die Funktion $f(x|\lambda)$ n Parameter λ enthält, deren Werte durch Anpassung an die Daten bestimmt werden

Definiere "χ^2-Wahrscheinlichkeit"

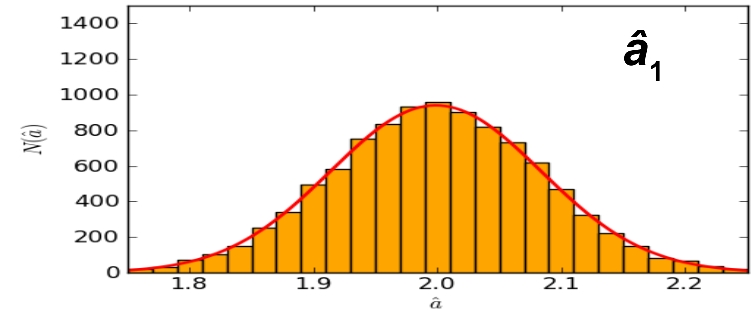
$$P(\chi_0^2 \mid n_f) \;\equiv\; \int_{\chi_0^2}^{\infty} p(\chi^2 \mid n_f)\, d\chi^2$$

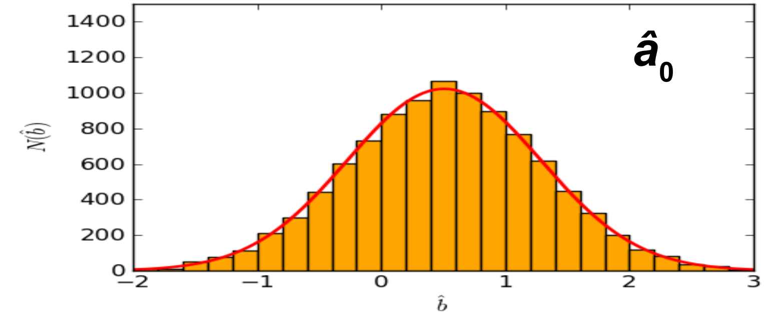
- **Wahrscheinlichkeit, für ein χ^2, das noch größer ist als das beobachtete**
- **schlechte Anpassung $\to$ χ^2_0 groß $\to$ χ^2-Wahrscheinlichkeit klein**
- **für gaußverteilte statistische Fluktuationen gleichverteilt zwischen 0 und 1**

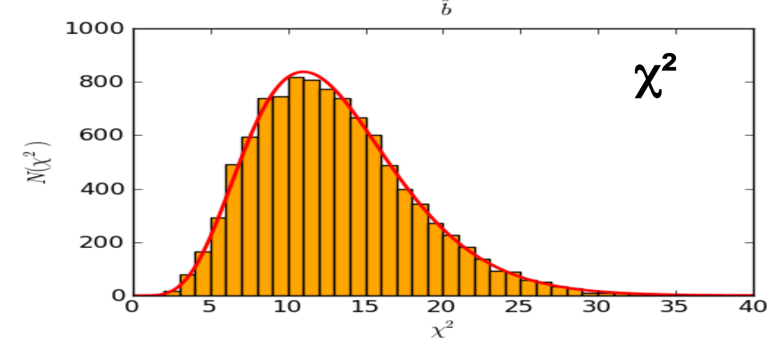
χ^2-Wahrscheinlichkeit

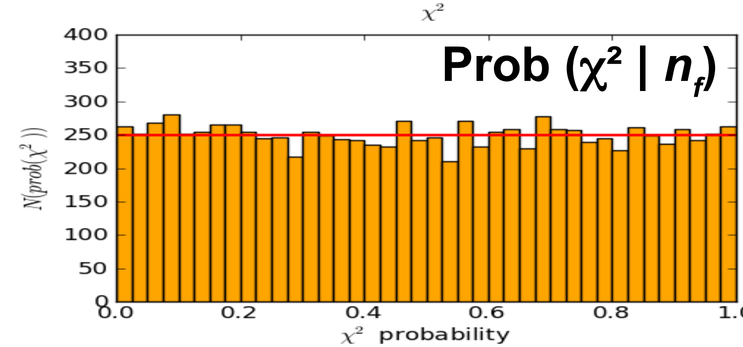
10'000 Iterationen von `lsline.py`

- **15 x_i –Werte, σ_i, a_0 und a_1 immer gleich**
- **15 y_i –Werte, für jede Iteration anders**
  - Abweichungen von $a_0 + a_1 \cdot x_i$ gemäß Gaußverteilung mit Standardabweichung σ_i
- **Histogramme: berechnete Schätzwerte, χ^2 und Prob(χ^2,n_f) aus 10'000 Iterationen**
- **Kurven: erwartete Verteilungen für Schätzwerte, χ^2 und Prob(χ^2,n_f)**
  - **Gaußverteilung mit $\mu_{\hat{a}_1} = a_1,\ \sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{V(\hat{a}_1)}$**
  - **Gaußverteilung mit $\mu_{\hat{a}_0} = a_0,\ \sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{V(\hat{a}_0)}$**
  - **χ^2-Verteilung für $n_f = 13$**
  - **Gleichverteilung zwischen 0 und 1**

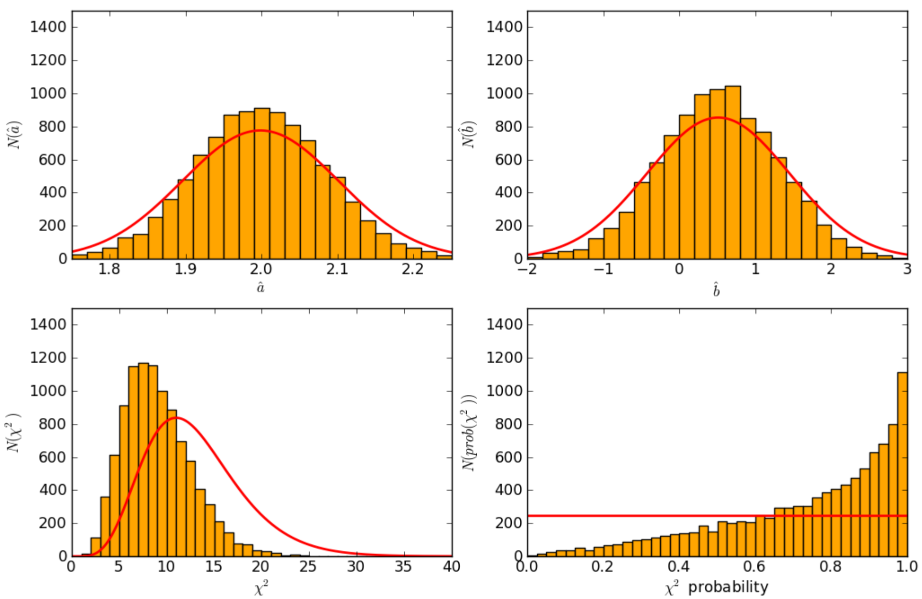






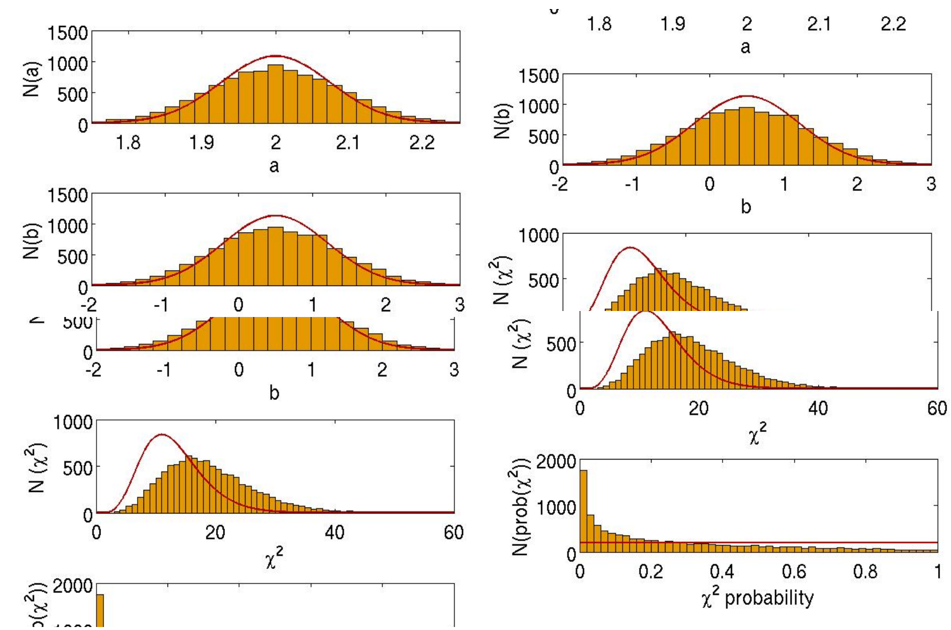


Beispiel: Anpassung einer Geraden, Unsicherheit 20% falsch geschätzt



Unsicherheit überschätzt

Unsicherheit unterschätzt



- **für gaußverteilte Messabweichungen auf den y_i gibt der Schnitt auf der χ^2-Wahrscheinlichkeit den Prozentsatz α korrekter Anpassungen, die im Mittel verworfen werden (1–α = Signifikanz des Tests)**

Vorlesungsprogramm

- **Messunsicherheiten, Darstellung von Messdaten**
- **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**
  - Mittelwert, Standardabweichung, Kovarianz und Korrelation
- **Fehlerfortpflanzungsgesetz**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
  - diskrete Verteilungen, kontinuierliche Verteilungen
  - zentraler Grenzwertsatz
- **Monte-Carlo Methode**
- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen II**
  - Faltung zweier Verteilungen
  - Verteilungen zweier Variablen
- **Stichproben und Schätzfunktionen**
  - Maximum-Likelihood Methode
  - Methode der kleinsten Quadrate
- **Interpretation von Messergebnissen**
  - Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen

kein Messergebnis ohne Angabe der Messunsicherheit !!

Korrelationen zwischen Messgrößen nicht vernachlässigen !

welche Verteilung gilt, was sind die Parameter?

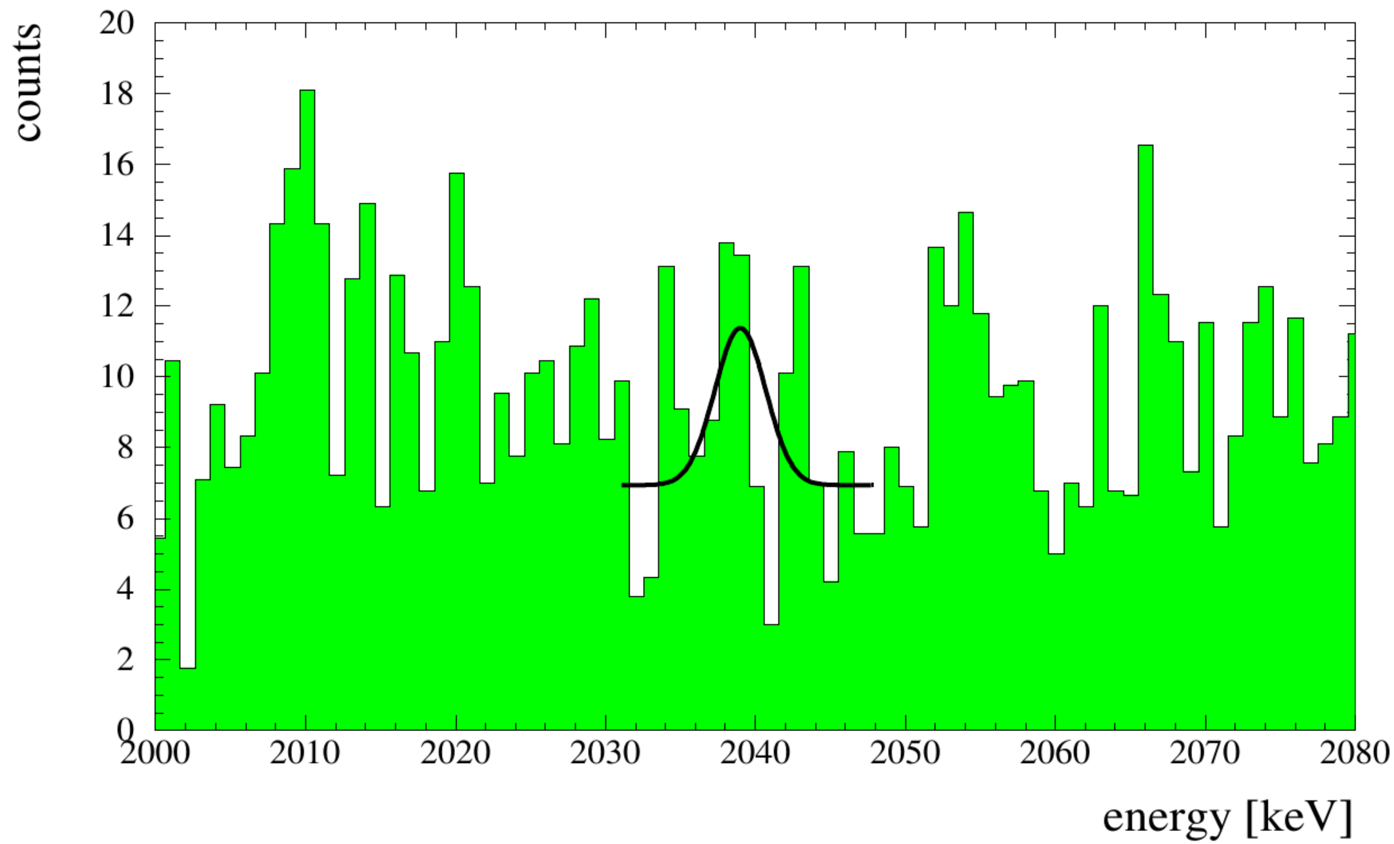
Wichtigkeit der Gaußverteilung, aber meistens nur eine Näherung!

Simulieren von Experimenten, Abschätzen von Messunsicherheiten

LS: χ^2, aber nur für gaußverteilte Abweichungen
ML: Modellieren beliebiger Messunsicherheiten

Aufgepasst
- wenn Unsicherheiten nicht gaußverteilt,
- an den Grenzen des erlaubten Bereichs

"THE END"



H. V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Dietz, H. L. Harney and I. V. Krivosheina,
"Evidence for neutrinoless double beta decay,"
Mod. Phys. Lett. A 16 (2001) 2409, [hep-ph/0201231].