

Übungen zur Physik PHY 117, Serie 5, HS 2011

Abgabe: Gruppen 5 bis 8: 29.11., Gruppen 1 bis 4: 6.12., jeweils 12.00 Uhr

Lösungen zu den Aufgaben

1. Maxwell-Boltzmann'sche Geschwindigkeits Verteilung [4P]

(a) Ableiten von $P(v)$ ergibt: $dP/dv = \text{const} * (2v \exp(-\frac{mv^2}{2k_B T}) + v^2 \exp(-\frac{mv^2}{2k_B T}) * (-\frac{mv}{k_B T})) = \text{const} * \exp(-\frac{mv^2}{2k_B T})(2v - \frac{mv^3}{k_B T})$. Das Maximum erhalten wir, wenn wir die Ableitung gleich Null setzen, also: $2v_{max} - \frac{mv_{max}^3}{k_B T} = 0$. Das ergibt: $v_{max} = \sqrt{2k_B T/m}$. Dies ist die Wahrscheinlichste Schnelligkeit eines Moleküls.

(b) Das zweite Moment der Verteilung, $\langle v^2 \rangle = \int v^2 P(v) dv$ ist die Breite der Wahrscheinlichkeitsverteilung, also bei welcher Schnelligkeit der Hauptteil der Verteilung ist. Eingesetzt ist

$$\langle v^2 \rangle = (\int v^2 P(v) dv) / (\int P(v) dv)$$

$$\langle v^2 \rangle = (\int v^4 \exp(-\frac{mv^2}{2k_B T}) dv) / (\int v^2 \exp(-\frac{mv^2}{2k_B T}) dv)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} (\int (\frac{mv^2}{k_B T})^2 \exp(-\frac{mv^2}{2k_B T}) d(\sqrt{\frac{mv^2}{k_B T}})) / (\int (\frac{mv^2}{k_B T}) \exp(-\frac{mv^2}{2k_B T}) d(\sqrt{\frac{mv^2}{k_B T}}))$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} (\int x^4 \exp(-x^2/2) dx) / (\int x^2 \exp(-x^2/2) dx) = \frac{k_B T}{m} (3\sqrt{\pi/2}) / (\sqrt{\pi/2}) = \frac{3k_B T}{m}$$

Zum Vergleich mit a) ziehen wir die Wurzel: $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T/m}$. Der Wert ist also um einen Faktor $\sqrt{3/2}$ grösser.

(c) Bei Temperatur T_1 ist $k = k_0 \exp(-\Delta E/(k_B T_1))$. Wir wollen die Temperatur T_2 , bei der $k' = 2k = k_0 \exp(-\Delta E/(k_B T_2))$ gilt. Das heisst, $k'/k = 2 = \exp(-\Delta E/(k_B T_2) + \Delta E/(k_B T_1))$. Damit erhalten wir: $\ln(2) = \Delta E/k_B (\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})$. Anders ausgedrückt: $\ln(2)k_B T_1/\Delta E = (T_2 - T_1)/T_2$. Auflösen nach T_2 ergibt: $T_2 = T_1 \frac{1}{1 - \ln(2)k_B T_1/\Delta E}$ mit der Näherung $\ln(2)k_B T_1/\Delta E = 0.07 \ll 1$ kann eine Taylorentwicklung gemacht werden und wir erhalten: $T_2 = T_1(1 + \ln(2)k_B T_1/\Delta E)$. Numerisch ist $k_B T_1/\Delta E = 0.1$, also $T_2 = T_1(1.07) = 321K$.

(d) Wir beginnen mit dem Endresultat von (c): $T_2 = T_1(1 + \ln(2)k_B T_1/\Delta E)$. Für den Fehler von T_2 brauchen wir die Ableitungen nach T_1 und nach ΔE . Diese sind: $\frac{\partial T_2}{\partial T_1} = 1 + 2\ln(2)k_B T_1/\Delta E$ und $\frac{\partial T_2}{\partial \Delta E} = -\ln(2)k_B T_1^2/\Delta E^2$. Damit erhalten wir für den Fehler in T_2 : $\sigma_{T_2}^2 = (1 + 2\ln(2)k_B T_1/\Delta E)^2 \sigma_{T_1}^2 + (\ln(2)k_B T_1^2/\Delta E^2)^2 \sigma_E^2 = (1 + 2\ln(2)k_B T_1/\Delta E)^2 \sigma_{T_1}^2 + (\ln(2)k_B T_1/\Delta E)^2 r_E^2 T_1^2$. Numerisch ist $r_E = 0.1$, $k_B T_1/\Delta E = 0.1$, $\sigma_{T_1} = 3K$ und $T_1 = 300K$. Damit erhalten wir: $\sigma_{T_2}^2 = (1.14)^2 9K^2 + 9(0.5 \cdot 0.01)0.01 \cdot 10^4 K^2 = 9(1.14^2 + 0.5)K^2 = 9 \cdot 1.8K^2$. Damit wird $\sigma_{T_2} = 3\sqrt{1.8}K \simeq 4.5K$.

2. spezifische Wärmen [2P]

(a) Im zweiatomigen idealen Gas tritt sowohl kinetische, also auch rotationelle Energie auf. Die kinetische Energie des Gases ist $E = 3/2 N k_B T$ (für jede Geschwindigkeitsrichtung $1/2 k_B T$). Da wir ein zweiatomiges Gas betrachten, müssen noch die Rotationen betrachtet werden, wovon es zwei mögliche gibt. Damit ist die innere Energie $U = 5/2 N k_B T$. Da bei konstantem Volumen keine Arbeit geleistet wird, ist die Änderung der inneren Energie die Änderung der Wärme und wir erhalten für die spezifische Wärme, $C_V = 5/2 N k_B$ oder für ein Mol: $C = 5/2 R$.

(b) Nun suchen wir die spezifische Wärme bei konstantem Druck. Dabei tritt nicht nur Wärme auf, es wird auch Arbeit geleistet. Der erste Hauptsatz sagt: $\Delta U = \delta Q - \Delta W$. Das Äquipartitionsprinzip sagt uns für $\Delta U = f/2 N k_B \Delta T$. Die ideale Gasgleichung sagt uns für die geleistete Arbeit: $\Delta W = p \Delta V = N k_B \Delta T$. Damit erhalten wir für die Wärmeänderung: $\Delta Q = f/2 N k_B \Delta T + N k_B \Delta T = (1 + f/2) N k_B \Delta T$. Das ergibt die spezifische Wärme: $C_p = (1 + f/2) N k_B$. Für ein einatomiges ideales Gas ist $f = 3$, also $C_p = 5/2 N k_B$.

3. thermisches Gleichgewicht [4P]

- a) Die Temperaturen gleichen sich an (also $T'_1 = T'_2$), die Volumina bleiben gleich (feste Wand, also $V'_1 = V_1$ und $V'_2 = V_2$). Die Drücke ändern sich entsprechend der Temperaturänderung ($p'_1 > p_1$ und $p'_2 < p_2$ wenn $T_1 < T_2$)
- b) Die Temperaturen gleichen sich an (also $T'_1 = T'_2$), die Drücke auch (also $p'_1 = p'_2$). Die Volumina ändern sich ($V'_1 > V_1$ und $V'_2 < V_2$ wenn $T_1 < T_2$)
- c) Die Temperaturen gleichen sich an (also $T'_1 = T'_2$), die Volumina bleiben gleich (feste Wand, also $V'_1 = V_1$ und $V'_2 = V_2$). Alle Teilchen verteilen sich gleichmässig, d.h. am Ende sind die Drücke rechts und links gleich.

4. Konvektion [5P]

- a) Mit $\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T}$ und $pV = Nk_B T$ gilt: $\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial(Nk_B T/p)}{\partial T} = \frac{Nk_B}{pV} = \frac{Nk_B}{Nk_B T} = \frac{1}{T}$.
- b) Nach dem idealen Gasgesetz ist $N/V = p/(k_B T)$, also gilt für ℓ : $\ell = \frac{k_B T}{2\pi d^2 p}$. Numerisch ergibt sich: $\ell = \frac{4 \cdot 10^{-21} J}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-20} m^2 \cdot 10^5 Pa} = \frac{10^{-1} J}{2\pi \cdot 10^5 N} = \frac{10^{-6} m}{2\pi} \simeq 1.5 \cdot 10^{-7} m$.
- c) Mit $\nu = \eta/\rho = \langle v \rangle \ell / 3$ ist $\eta = \rho \langle v \rangle \ell / 3$. Numerisch gilt also: $\eta = 1 kg/m^3 \cdot 500 m/s \cdot 1.5 \cdot 10^{-7} m / 3 = 5 \cdot 1.5 / 310^{-5} kg/(ms) = 5 \cdot 0.510^{-5} Pas = 2.5 \cdot 10^{-5} Pas$.
- d) Wir haben als Bedingung: $Ra = \frac{g \Delta T d^3 \alpha}{\kappa \nu}$
 $g_{\text{trsim2000}} = Ra_{\text{krit}}$. Mit den gegebenen Werten entspricht das einem Kriterium für eine Mindest-Dicke der Schicht von: $d_{\text{min}} = \left(\frac{Ra_{\text{krit}} \kappa \nu}{g \Delta T \alpha} \right)^{1/3} = \left(\frac{Ra_{\text{krit}} \kappa \nu T}{g \Delta T} \right)^{1/3}$. Numerisch erhalten wir: $d_{\text{min}} = \left(\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-5} m^2 / s \cdot 2 \cdot 10^{-5} m^2 / s \cdot 300 K}{10 m / s^2 \cdot 10^{-2} K} \right)^{1/3} = \left(\frac{24 \cdot 10^{-5} m^3}{10^{-1}} \right)^{1/3} = (2.4 \cdot 10^{-3} m^3)^{1/3} = 2.4^{1/3} \cdot 10^{-1} m \simeq 13 cm$.
- e) Nach der Gleichung $d_{\text{min}} = \left(\frac{Ra_{\text{krit}} \kappa \nu T}{g \Delta T} \right)^{1/3}$ gehen alle Variablen mit einem Potenzgesetz hoch $1/3$ ein. Damit können wir mit relativen Fehlern rechnen und erhalten: $r_d^2 = (1/3)^2 (r_{Ra}^2 + r_\kappa^2 + r_\nu^2 + r_T^2 + r_{\Delta T}^2)$. Numerisch ist: $r_{Ra} = r_\kappa = r_\nu = r_{\Delta T} = 0.1$ und $r_T = 0.01$. Damit können wir den Fehler in T vernachlässigen und erhalten: $r_d^2 = (1/3)^2 (4 \cdot 0.1^2)$ oder $r_d = 2/3 \cdot 0.1 \simeq 6.5\%$. Das entspricht $\sigma_d \simeq 1 cm$.

Multiple-Choice Aufgaben

1. Taylor-Entwicklung - Typ A, 1P

Was ist die Taylor-Entwicklung von $\exp(x)$, wenn x klein ist?

D $1 + x$

2. Entropie - Typ A, 1P

Was passiert mit der Entropie (eines idealen Gases) wenn Sie die Anzahl Teilchen verdoppeln? Temperatur und Volumen bleiben konstant.

A Sie verdoppelt sich

3. Diffusion und Boltzmann Verteilung - Typ B, 3P

C Die Diffusionskonstante hängt exponentiell von $1/T$ ab.

E Die Diffusionskonstante ist hängt vom Material ab.

F Die Aktivierungsenergien in der unteren Hälfte des Graphen sind grösser als die in der oberen Hälfte.

November 15, 2011