Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

7 Strömungen in Flüssigkeiten

7.1 Einleitung

In der Wärmelehre haben wir uns mit dem Transport von Stoffen und Wärme mittels diffusiver Bewegung befasst. Wir haben auch kurz konvektive Strömungen behandelt, aber Strömungen können auch makroskopisch auftreten durch eine äussere Kraft. Dann tritt ebenfalls Transport von Material auf und diese Art von Transport wollen wir in diesem Kapitel beschreiben. Ein wichtiges Beispiel mit dem wir uns dabei auseinander setzen werden ist der Transport von Nährstoffen über den Blutkreislauf. Wir werden uns überlegen, wie wir den Transport beschreiben müssen, welche Anforderungen das System der Blutgefässe erfüllen muss um für einen möglichst effizienten Transport zu sorgen. Dabei weren wir auch sehen, dass der Übergang von Transport durch Strömung und dem Transport durch Diffusion, eine gute Abschätzung für die Grösse von Kapillaren ergibt.

7.2 Was heisst flüssig?

Wir haben in der Elastizitätslehre gesehen, dass Gase und Flüssigkeiten (Fluide) kein Schermodul besitzen. Das heisst, wenn keine Strömungen bestehen und das Gas oder die Flüssigkeit makroskopisch im Gleichgewicht sind, keine Schubspannungen bestehen ($\tau = 0$).

Während bei festen Körpern die Moleküle durch intermolekulare Kräfte an Gleichgewichtslagen gebunden sind, um die herum sie thermisch angeregte Schwingungen ausführen, befinden sich die Moleküle von Flüssigkeiten und Gasen in regelloser, ungebundener Bewegung. Ihre mittlere kinetische Energie ist grösser als die Bindungsenergie.

Der Unterschied zwischen Flüssigkeit und Gas beruht auf der Grösse der intermolekularen Kräfte. In Flüssigkeiten sind die Moleküle dicht gepackt, so dass kohäsionskräfte auftreten. Dadurch bildet die Flüssigkeit Tropfen mit einer definierten freien Oberfläche. Die Kompressibilität ist klein. Gase dagegen bilden keine Tropfen, sondern beanspruchen das ganze, ihnen zur Verfügung stehende Volumen. Die Kompressibilität ist im allgemeinen gross.

Wir werden uns jetzt also mit strömenden Fluiden beschäftigen und diese quantitativ beschreiben.

7.3 Die Kontinuitätsgleichung

Überlagert sich der statistischen, thermischen Bewegung von Gas- oder Flüssigkeitsmolekülen eine korrelierte, d. h. geordnete Driftbewegung, so spricht man von einer Strömung. Eine solche ist mit dem makroskopischen Transport einer Grösse verbunden, wie wir schon in der Wärmelehre gesehen haben. Hier wollen wir uns die Eigenschaften von solchen Strömungen etwas detaillierter betrachten. Im Allgemeinen wird die Strömung durch ein Stromlinienbild (Abbildung 7.1) veranschaulicht. Die Stromlinien sind die über die thermische Bewegung ausgemittelten Bahnen der einzelnen Teilchen oder eines Probekörpers, der von der Strömung mitgeführt wird. Die Driftgeschwindigkeit ist somit tangential zu den Stromlinien.

Mathematisch gesehen, bilden die Geschwindigkeitsvektoren einer Strömung ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$, also eine Ansammlung von Vektoren, die vom Ort und der Zeit abhängen. Die Stromlinien sind die Feldlinien dieses Feldes. Felder werden wir im nächsten Semester bei der Elektriztätslehre ausführlich behandeln.

Ist das Stromlinienbild zeitlich unveränderlich, so spricht man von einer stationären Strömung, d.h. an einem bestimmten Ort $\vec{r}$ ist die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ zeitunabhängig. Die Geschwindigkeit eines mit der Strömung mitschwimmenden Teilchens, das ja seinen Ort verändert, braucht dabei keineswegs zeitlich konstant zu sein.

Die Geschwindigkeit betrachten wir weil die Strömung die wir beschreiben wollen letztlich dadurch beschrieben ist. Wenn wir als den Strom, bzw. den Massenstrom die zeitliche Veränderung der Masse an einem Ort definieren, also wieviel Masse wird in welcher Zeit transportiert, dann erhalten wir:

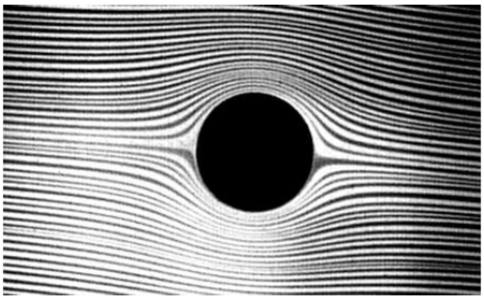
$$I = \dot{Q} = \frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho A\frac{dx}{dt} = \rho A v$$

wobei A die Querschnittsfläche der betrachteten Strömung ist und ρ die Dichte des strömenden Fluids. Das heisst der Strom, oder besser die *Stromdichte*, also der Strom pro Fläche:

$$I/A = \vec{j} = \rho\vec{v}$$

ist direkt proportional zur Strömungsgeschwindigkeit.

Zeigt eine Strömung ein *glattes* Stromlinienbild, so nennt man sie *laminar*. Sind die Stromlinien *verwirbelt*, so nennt man die Strömung *turbulent*. Bei gegebenen realen Gasen und Flüssigkeiten erfolgt beim Überschreiten einer kritischen Geschwindigkeit v_K bei der Um- oder Durchströmung eines gegebenen Hindernisses ein Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung. Allgemein wird dies durch die Reynolds Zahl quantifiziert. Diese beschreibt die relative Stärke der viskosen Reibung und der Reibung die durch die Überwindung der Trägheit des Fluids zustande kommt. Ursache der Turbulenz sind dynamische Schubspannungen als Folge der Viskosität. Im Folgenden wollen wir uns hauptsächlich auf laminare Strömungen beschränken.



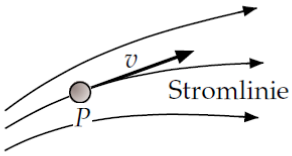
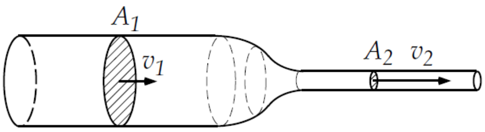


Abbildung 7.1: Bild einer Flüssigkeitsströmung um einen Zylinder herum, das mit Einfärbung der Flüssigkeit sichtbar gemacht wurde (links). Der Geschwindigkeitsvektor der strömenden Flüssigkeitsmenge ist immer parallel zur Stromlinie (rechts).



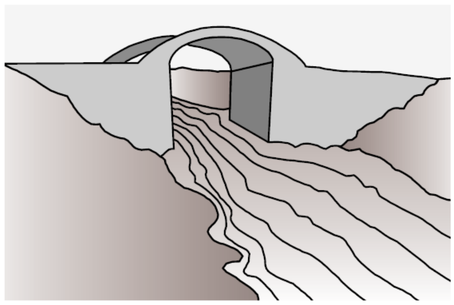
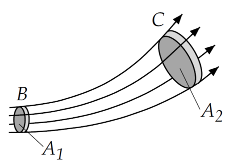


Abbildung 7.2: Im engen Querschnitt unter der Brücke drängen sich die Stromlinien zusammen (rechts). Dies bedeutet auch eine höhere Strömungsgeschwindigkeit, solange der Fluss überall gleich tief ist, und die Oberflächenverteilung der Stromlinien den Vorgang beschreibt. Das gleiche Bild und der gleiche Effekt zeigen sich bei einer Verengung einer Wasserröhre (links).

Kontinuitätsgleichung für stationäre Strömungen: Die Stromdichte lässt sich also auch direkt als die Anzahl der Stromlinien pro Flächeneinheit auffassen. Wird diese grösser, so entspricht dies auch einer grösseren Geschwindigkeit. Abbildung 7.1 erinnert an eine uns vermutlich bekannte Beobachtung des Anwachsens der Strömungsgeschwindigkeit in der Nähe einer Einschnürung des Flussbetts. Die physikalische Grundlage dieser Beobachtung ist die Erhaltung des Gesamtflusses: die einfliessende Wassermenge pro Zeiteinheit muss gleich der ausfliessenden sein. Bei kleinerem Querschnitt muss daher die Durchflussgeschwindigkeit grösser werden. Die mathematische Form dieser Erfahrung ist die Kontinuitätsgleichung.

Für die mathematische Definition des Flussbegriffes betrachten wir eine sogenannte *Stromröhre* innerhalb einer stationären Strömung, d. h. einen durch Stromlinien begrenzten Schlauch mit Eintrittsfläche A_1 und Austrittsfläche A_2. In der Zeit dt fliessen durch A_1 und A_2 die Wassermengen



$$I_1 = \rho_1 v_1 A_1 \quad \text{und} \quad I_2 = \rho_2 v_2 A_2$$

Im stationären Fall muss wegen der Erhaltung der Materie bei A_1 gleichviel hinein wie bei A_2 hinaus fliessen, also $I_1 = I_2$ gelten. Daher gilt die

$$\text{Kontinuitätsgleichung :} \;\; \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

Bei Flüssigkeiten kann ρ als konstant angenommen werden, $\rho = \rho_1 = \rho_2$, so dass gilt

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

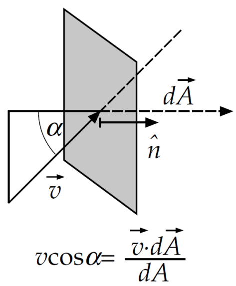
d. h. der Fluss des $\vec{v}$-Feldes längs einer Stromröhre ist konstant, bzw. der Fluss durch eine geschlossene Fläche gleich Null. Wir haben hier die Ein- und Austrittsfläche senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit gewählt, was einem Spezialfall entspricht. Für diesen Fall lautet dann die Aussage der Kontinuitätsgleichung:

Die Geschwindigkeit längs einer stationären, laminaren Strömung ist umgekehrt proportional zum Rohrquerschnitt.

In etwas allgemeinerer Form definieren wir als Fluss durch eine Fläche A (mit $d\vec{A} \equiv \hat{n} dA$)

$$\Phi = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} \equiv \int_A (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \int_A v_n dA = \int_A v \cos\alpha dA$$

Der Einheitsvektor $\hat{n}$ steht senkrecht auf dem Flächenelement dA, v_n ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit $\vec{v}$.



Diese Definition des Begriffs Fluss (Φ) schliesst die Möglichkeit ein, dass die Geschwindigkeit nicht an allen Orten der Fläche A gleich ist und ferner, dass die Fläche nicht notwendigerweise normal zu den Flusslinien steht. Für $A \parallel \vec{v}$ ($\alpha = \pi/2$) ist der Fluss minimal, für $A \perp \vec{v}$ ($\alpha = 0$) ist der Fluss maximal. Für eine beliebig gestellte Querschnittsfläche A der Stromröhre ist dann der Fluss Φ konstant.

Diese Definition des Flusses erlaubt uns eine allgemeinere Formulierung der Kontinuitätsgleichung für den Massenfluss einers Fluides:

Wählen wir als Fläche, für die wir für das Flussintegral auswerten, eine *geschlossene* Oberfläche A_V, die das Volumen V begrenzt. Dann besagt die Massenerhaltung, dass der einkommende Fluss gleich dem ausgehenden Fluss sein muss. Der Gesamtfluss ist also gleich null. Vorausgesetzt wird dabei, dass sich im Innern des Volumens keine Massenquelle oder -Senke befindet.

$$\text{Kontinuitätsgleichung :} \;\; \Phi = \oint_{A_V} \rho \, \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint_{A_V} \rho \, v_n dA = 0$$

Diese Form der Kontinuitätsgleichung gilt für beliebige Formen von Volumen, und auch im Falle, dass die Dichte ortsabhängig ist.

Wenn das Material komprimierbar ist, oder wir irgendwelche Quellen von material haben, so können wir die KontinuitÄtsgleichung für nicht stationäre Prozesse erweitern. Um die allgemeine Kontinuitätsgleichung herzuleiten, betrachten wir den Massenfluss durch ein beliebiges Volumenelement dxdydz. Für den in das Volumenelement in x-Richtung einfliessenden Massenstrom gilt:

$$I_1 = \rho v_x(x) dydz$$

Für den in x-Richtung herausfliessenden:

$$I_2 = \rho v_x(x + dx) dydz$$

Das heisst für die Differenz dI_x gilt:

$$dI_x = I_1 - I_2 = \rho \underbrace{(v_x(x) - v_x(x + dx))}_{\triangle v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx} dydz = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdydz = \rho dV \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

wobei dV gerade das Volumen ist, das wir betrachten. Um die Gesamtänderung des Flusses zu berechnen müssen wir auch noch die anderen Raumrichtungen betrachten, also dI_y und dI_z und die Terme aller drei Richtungen aufsummieren:

$$dI_{dV} = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV$$

Damit haben wir alles betrachtet, was in das Volumen hineinfliesst und davon alles was herausfliesst abgezogen. Ween es also eine solche Änderung im Massenstrom gibt, muss sie von einer Änderung der Dichte kommen. Nur wenn die Masse nicht erhalten ist, kann $dI_{dV} \neq 0$ sein. Das heisst es gilt: $dI_{dV} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$. Nimmt man diese beiden Ausdrücke zusammen, erhalten wir die **allgemeine Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\rho div(\vec{v})$$

wobei wir die Divergenz definiert haben als $div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$. Zusammen mit dem Fick'schen Gesetz, das uns sagt, dass ein Dichtegradient einen Diffusionsstrom hervorruft ergibt die Kontinuitätsgleichung z.B. direkt die Diffusionsgleichung. Für den Fall, dass die Dichte sich nicht ändern kann erhalten wir die obige, stationäre Kontinuitätsgleichung. Jede Strömung muss also durch eine Kontinuitätsgleichung beschrieben werden. Im Folgenden werden wir uns ansehen, wie dies mit der Bewegungsgleichung des Fluids zusammenhängt.

7.4 Bewegungsgleichung: Die Eulergleichung

Das Newton'sche Aktionsprinzip sagt uns, wie sich Massen unter Einfluss von Kräften bewegen. Betrachten wir wieder einen kleinen Zylinder mit Volumen $dV = dA\,dz$ und Masse $dm = \rho\,dV$, dessen Achse parallel zur z-Richtung liegt, genau wie im Falle der Hydrostatik. Sei p der Druck auf Deckel und Boden, und $d\vec{F}$ eine Volumenkraft (z.B. Gewicht: $d\vec{F} = dm\,\vec{g}$).

Im Gegensatz zur Hydrostatik müssen sich die Kräfte nun nicht mehr unbedingt aufheben; wenn die Summe der Kräfte verschieden von null ist, ergibt sich eine Beschleunigung der Masse dm. In z-Richtung gilt also die Bewegungsgleichung:

$$dm\,\ddot{z} = p(z)dA - p(z+dz)dA + dF_z$$

Dividieren wir diese Gleichung durch das Volumen $dV = dA\ dz$, definieren die Kraftdichte $\vec{f} = \vec{F}/dV$ (im Gravitationsfeld ist $\vec{f} = \rho\,\vec{g}$)und setzen die Beschleunigung durch die Ableitung der Geschwindigkeit v_z, erhalten wir:

$$\rho\,\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z$$

Diese Ueberlegung können wir auch in die x und y Richtung ausführen, und erhalten so drei Gleichungen für die drei Raumrichtungen x, y, und z. In Vektorschreibweise fassen wir die drei Gleichungen zusammen, und erhalten damit die

$$\text{Eulergleichung der Fluiddynamik}: \qquad \rho\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}\,p + \vec{f}$$

Sie beschreibt die allgemeine Geschwindigkeitsverteilung einer reibungsfreien Flüssigkeit.

Im Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x,y,z,t)$ begegnen wir einem typischen Beispiel einer (vektorwertigen) Funktion mehrerer Variablen. Die partielle Ableitung nach der Zeit hat hier eine besondere Bedeutung. Es gilt nämlich:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{stationaer}$$

Eine Strömung hatten wir ja stationär genannt, wenn das Stromlinienbild nicht von Zeit abhängt. In der Tat, wenn wir an einem festen Ort (x,y,z) sitzen, und die Veränderung in der Zeit beobachten, dann ist das gerade die partielle Ableitung. Sie verschwindet genau dann, wenn sich das Stromlinienbild im Laufe der Zeit nicht ändert.

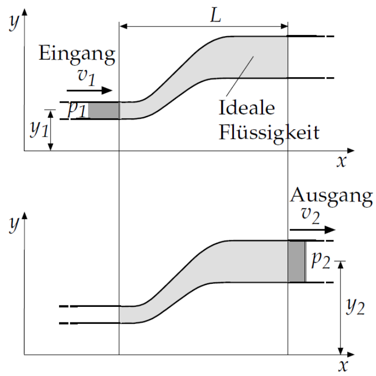
Im Gegensatz dazu nennt man die Ableitung, die in der Eulergleichung vorkommt, auch die substantielle Ableitung. Sie beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit, die man sieht, wenn man mit einem Massenteilchen mitgeht. Die partielle und die substantielle Ableitung sind natürlich völlig verschieden.

Analog wie in der Mechanik der Massenpunkte liegt auch hier bei der Integration dieser Gleichung oft das Hauptproblem bei der Bestimmung der Randbedingungen.

7.5 Energiebetrachtung: Die Bernoulligleichung

Wie in der Mechanik der Massenpunkte kann das System statt mit den Bewegungsgleichungen auch durch Energieerhaltung beschrieben werden. Das vereinfacht oft die Lösung des Problems, und erlaubt uns auch direkter anwendbare Gesetze zu formulieren.

Wir betrachten eine laminare, stationäre Strömung einer inkompressiblen, hier nun auch reibungsfreien Flüssigkeit in einer Röhre variablen Querschnitts und dazu variabler Höhenlage. Diese Röhre muss nicht notwendigerweise reell existieren, sondern kann durch eine Gruppe von zusammengefassten Stromlinien gebildet werden. Die Eintrittsfläche A_1 und die Austrittsfläche A_2 sind senkrecht zur Strömung gewählt, und ferner soll auch die Geschwindigkeit nicht über den Bereich der Flächen variieren. Gemäss der Kontinuitätsgleichung erhaltem wir für die im Zeitintervall dt die Flächen passierende Flüssigkeitsmenge dm



$$dm = dm_1 = \rho v_1 A_1 dt = dm_2 = \rho v_2 A_2 dt$$

Wir wollen nun eine Energiebilanz aufstellen für den Zeitraum dt. Die vom Druck netto geleistete Arbeit dW (Druck $\times$ Fläche $\times$ Weg) ist gleich der Zunahme von kinetischer und potentieller Energie: $dW = dT + dU$.

$$dW = p_1 A_1 v_1 dt - p_2 A_2 v_2 dt \qquad dT = \frac{dm}{2}(v_2^2 - v_1^2) \qquad dU = gdm(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow \qquad p_1 - p_2 = \rho(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + gy_2 - gy_1)$$

$$\Rightarrow p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho g y_2$$

Da die Orte 1 und 2 völlig willkürlich gewählt waren, folgt die Konstanz dieses Ausdrucks längs der ganzen Strömung ($y \equiv h$):

$$p + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho g h = \text{ const.} \qquad \text{Bernoulli'sche Gleichung}$$

Dies gilt entlang der Stromlinien einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit. Verläuft die Stromlinie entlang einer Äquipotentialfläche der Gravitationskraft, so reduziert sich die Bernoulli'sche Gleichung auf den Ausdruck

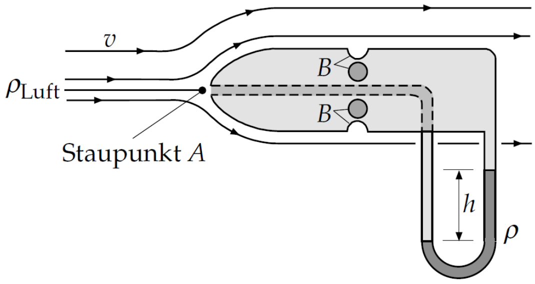
$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{ const.} \equiv p_0$$

p ist der wirkliche, von einem in der Strömung liegenden Manometer gemessene Druck, der Term $\rho v^2/2$ hat ebenfalls die Dimension eines Druckes und heisst *dynamischer Druck* oder *Staudruck*. p_0 bezeichnet man als den Gesamtdruck. In Worten lautet also die Bernoulli'sche Gleichung:

Statischer Druck (p) plus Staudruck ($\rho v^2/2$) ergibt den Gesamtdruck (p_0)

Die Bernoulli'sche Gleichung ist die Basis für das Verständnis verschiedener Alltagsphänomene und technischer Instrumente. Einige von ihnen wollen wir nun näher betrachten.

Beispiel – Messung von Strömungsgeschwindigkeiten mit dem Pitot-Rohr: Beim Pitot-Rohr handelt es sich um einen stromlinienförmigen Hohlkörper, bei dem die Druckdifferenz zwischen dem Staupunkt A vorn und einer seitlichen Öffnung B gemessen wird. In A ist die Strömungsgeschwindigkeit null, bei der seitlichen Öffnung dagegen v. Es gilt dann (ρ_A=Dichte der Luft, ρ_M = Dichte der Manometerflüssigkeit)



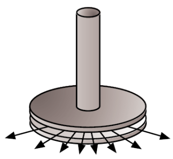
$$A: \quad v = 0, \quad p_0 = p_A \qquad\qquad B: p_0 = p_B + \frac{\rho_A}{2} v^2$$

$$p_A - p_B = \frac{\rho_A}{2} v^2 = \rho_M g h$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho_A}} = \sqrt{\frac{2gh\rho_M}{\rho_A}}$$

Hier haben wir den am Manometer abgelesenen Druckunterschied (Höhe h) bereits eingesetzt.

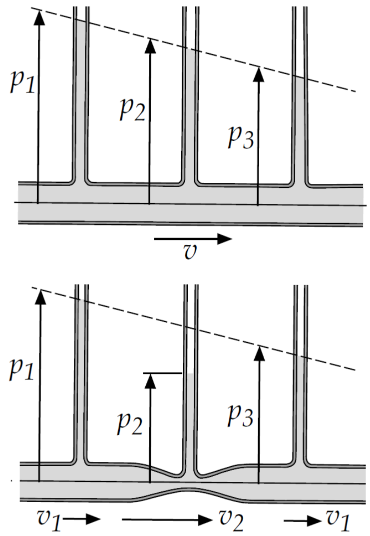
Beispiel – Hydrodynamisches Paradoxon: Strömt ein Gas aus einer Druckflasche gegen eine bewegliche Platte, so wird diese angesaugt und nicht etwa weggeblasen. Infolge der hohen Geschwindigkeit des Gases zwischen den beiden Platten ist dort der Druck kleiner als der Luftdruck aussen. Die beiden Platten werden zusammen gepresst.



Beispiel: Druckverteilung in einem Venturi-Rohr: Ein Rohr mit variablem Querschnitt schliesst eine stationäre Strömung ein. Der Druck p im Rohr variiert ebenfalls mit dem Querschnitt. Die Kombination von Kontinuitätsgleichung und Bernoulli'scher Gleichung liefert

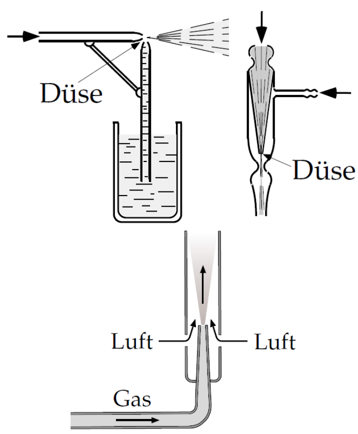
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \qquad \frac{\rho}{2}v_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2}v_2^2 + p_2 = \frac{\rho}{2}v_1^2(\frac{A_1}{A_2})^2 + p_2$$

$$\Rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}) < p_1$$



Mit $A_1 = A_3$ folgt $p_1 = p_3$. Im Experiment, ob nun das Rohr von Luft durchströmt oder von Wasser durchflossen wird, sind die Drucke p_2 und p_3 kleiner als berechnet. Man beobachtet selbst bei einem Rohr mit unveränderlichen Querschnitt einen linearen Druckabfall. Dies kommt daher, dass eine der Voraussetzungen der Bernoulli'schen Gleichungen, nämlich die Absenz von Schubkräften und Reibung nicht erfüllt ist. Das werden wir im nächsten Kapitel behandeln.

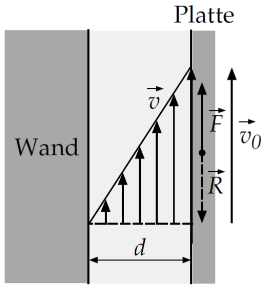
Im Alltag verwendete Varianten des Venturi-Rohrs sind Zerstäuber (a), Wasserstrahlpumpe (b), und Bunsenbrenner (c). An der Düsenöffnung (kleiner Querschnitt) ist die Geschwindigkeit gross, der Druck klein, so dass der Strahl eine Saugwirkung ausübt. Der erreichbare Enddruck der Wasserstrahlpumpe ist nicht beliebig klein, sondern begrenzt durch den Dampfdruck p_D des Wassers (bei 20° C $p_D = 23$ mbar). Mit Öl- oder Quecksilber-Strahlpumpen bei tiefen Temperaturen können Enddrucke bis zu etwa 10^{-8} mbar erreicht werden. Beim Bunsenbrenner hilft der Unterdruck in der Nähe des an der Düse austretenden Gases die für das Aufrechterhalten des Verbrennungsvorgangs notwendige Luft anzusaugen.



7.6 Reibung und die Navier-Stokes-Gleichung

Wir haben in der Mechanik die Eigenschaft der Viskosität kennengelernt und dabei gesehen, dass bei einer angelegten Schubspannung ein Fliessgeschwindigkeitsgradient entsteht. Umgekehrt betrachtet heisst dies, dass die Aufrechterhaltung eines Geschwindigkeitsgradienten eine Schubspannung erfordert. Dies ist der Hintergrund von viskoser Reibung und wie diese eine Strömung beeinflusst, werden wir uns in diesem Kapitel ansehen.

Um den quantitativen Zusammenhang zwischen Reibungskräften und der Viskosität einer Flüssigkeit zu erhalten, machen wir einen Modellversuch. Zwischen zwei parallel gestellten Platten, die sich mit der Geschwindigkeit v_0 zueinander bewegen, befindet sich ein Gas oder eine Flüssigkeit. Zwischen den Platten stellt sich eine laminare Strömung mit einer linearen Geschwindigkeitsverteilung $v(x) = ax$ ein (x=horizontale Koordinate in der Zeichnung). Die Schubspannungen und Reibungskräfte zwischen den benachbarten Flüssigkeitsschichten sind, wie dies Newton erstmals formulierte, proportional zum Geschwindigkeitsgradienten **Newton'sches Reibungsgesetz**



$$\tau = \eta \frac{dv}{dx} \quad \text{mit} \quad \frac{dv}{dx} = a = \frac{v_0}{d}$$

Betrachten wir nun eine Scheibe der Fläche dA, der Dicke dx und der Masse $dm = \rho\ dA\ dx$, die sich in der Zeichnung in vertikaler (z-)Richtung mit der Geschwindigkeit v_z bewegt. Ihre Bewegungsgleichung lautet

$$dm\ \frac{dv_z}{dt} = \tau(x + dx)\ dA - \tau(x)\ dA$$

wenn wir vorläufig nur die Reibungskraft berücksichtigen. Dividieren durch dV ergibt:

$$\rho\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

Wir setzen das Newton'sche Reibungsgesetz ein und erhalten:

$$\rho\ \frac{dv_z}{dt} = \eta\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$$

Macht man die gleiche Überlegung in allen drei Raumrichtungen und fasst das Resultat in Vektorschreibweise zusammen erhält man die Bewegungsgleichung, die sogenannte **Navier-Stokes-Gleichung** (hier in der Form für inkompressible Flüssigkeiten):

$$\rho\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \eta\ \Delta\vec{v}$$

mit der Definition für den Laplaceoperator:

$$\Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \qquad \text{und} \qquad \Delta\vec{v} = (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$$

Nehmen wir noch mit, dass das Geschwindigkeitsfeld vom Ort und der Zeit abhängt, müssen wir die totale Ableitung nach der Zeit noch umschreiben und erhalten:

$$\rho\ \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) = \eta\ \Delta\vec{v}$$

Wegen der quadratischen Abhängigkeit von der Geschwindigkeit auf der linken Seite, lässt sich diese allgemeinere Form der Navier-Stokes-Gleichung in der Regel nicht analytisch lösen. Für viele Probleme werden stattdessen numerische Methoden und Computer eingesetzt, wobei hier sehr oft Rechenzeiten auftreten, die zu lange sind um nützlich zu sein.

Im Gegensatz zur Betrachtung bei den reibungsfreien Strömungen führt uns hier die Energieerhaltung nicht auf ein praktisches Gesetz: Wegen der Reibung geht ein Teil der Energie ja in Wärme über.

Diese Newton'sche Reibungsgesetz hat die gleiche Form wie die Diffusions- und Wärmeleitungsgleichung, die wir schon in der Wärmelehre angetroffen haben.

Für Gase steigt, für Flüssigkeiten sinkt η mit zunehmender Temperatur. Für Gase ist η druckunabhängig. Typische Werte der Viskositätskonstante η sind in Tabelle 7.1 aufgeführt.

Substanz	$\eta [Pa \cdot s]$			
	0° C	20° C	50° C	100° C
Luft	0.000017	0.000017		0.000022
H_2O	0.00179	0.00101	0.00055	0.00028
Rhizinusöl		0.95		
Glycerin		1.53		
	17° C	23° C	30° C	37° C
Blut		0.004		
Blutplasma	0.0020	0.00173	0.0015	0.013

Tabelle 7.1: Viskositätskonstante für verschiedene Substanzen

Übergang zu Turbulenz: In turbulenten Strömungen spielen vor allem die Trägheitskräfte eine grosse Rolle, also die linke Seite der Navier-Stokes Gleichung. Der Term quadratisch in den Geschwindigkeiten kann zu Verwirbelungen Anlass geben, die eine sehr komplizierte Strömung zur Folge haben. Die Wichtigkeit der verschiedenen Bereiche lässt sich durch eine Umformung der Navier-Stokes Gleichung erhalten. Wenn wir alle Längen durch eine bestimmte Längenskala L normieren, alle Geschwindigkeiten auf eine mittlere Geschwindigkeit u und damit alle Zeiten auf eine Zeit L/u, dann wird die Navier Stokes Gleichung:

$$\frac{uL\rho}{\eta}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) = \Delta \vec{v}$$

wobei überall normierte Grössen stehen. Welcher Term überwiegt wird nun durch die dimensionslose Konstante $Re = \frac{uL\rho}{\eta}$ bestimmt, die Reynolds Zahl. Die Folgen bei sehr kleinen Reynolds Zahlen werden wir uns im allerletzten Kapitel ansehen.

Die kritische Geschwindigkeit v_K, bei der die laminare Strömung in eine turbulente umschlägt, hängt auch von der Viskosität η ab, dazu von der Dichte ρ und einer charakteristischen Länge L (Gefässdimension, Durchmesser des Hindernisses usw.). In unserem Beispiel wäre L der Plattenabstand. Auf Grund empirischer Resultate ergibt sich

$$v_K = Re_K \frac{\eta}{\rho L}$$

Re_K ist dabei die kritische Reynolds-Zahl. Für glatte Rohre findet man z. B. $Re_K = 2300$. Ist der Rohrdurchmesser $L = 1$ cm, so erhält man die folgenden kritischen Geschwindigkeiten:

$$v_K = 0.23 \text{ m/s für Wasser} \quad v_K = 3.2 \text{ m/s für Luft}$$

In der turbulenten Strömung wird die die Widerstandskraft proportional zur Dichte und zum Quadrat der Geschwindigkeit und hängt im übrigen stark von der geometrischen Form des Körpers ab.

Nichtnewton'sche Flüssigkeiten: Viele Flüssigkeiten erfüllen das Newton'sche Reibungsgesetz nicht, d. h. die Viskosität η ist nicht konstant, sondern nimmt mit zunehmendem Geschwindigkeitsgradienten zu oder ab. Solche sogenannten Nicht-Newtonschen Flüssigkeiten sind z. B. Blut, Speichel, Dispersionsfarben, Pasten, Salben, Gele.

7.7 Das Gesetz von Hagen und Poiseuille

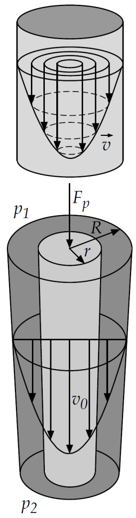
In vielen Anwendungen, so auch im Blutkreislauf den wir uns ja am Ende beschreiben wollen, trifft man auf die folgende Situation: Die Strömung einer Flüssigkeit durch ein zylindrisches Rohr wird durch einen Druckunterschied an den beiden Enden des Rohrs aufrechterhalten (beim Blutkreislauf ist das das pumpende Herz). Die alltägliche Erfahrung lehrt, dass die Durchflussmenge vom Rohrdurchmesser einerseits und vom Druck andererseits abhängt. Ferner ist die Geschwindigkeitsverteilung in dem Rohr inhomogen. In der Mitte ist die Geschwindigkeit am grössten. Beide Befunde finden wir in den *Hagen-Poiseuille'schen* Gesetzen ausgedrückt.

Für ein Rohr mit Radius R der Länge L, in dem durch einen Druckunterschied Δp eine laminare Strömung unterhalten wird, finden wir ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil

$$v(r) = \frac{1}{4}\frac{\Delta p}{\eta L}(R^2 - r^2)$$

Die Durchflussmenge ergibt sich zu

$$\dot{Q} = \frac{\pi \Delta p \; R^4}{8 \eta L} \qquad [\mathrm{m^3 s^{-1}}]$$



Zum Beweis der beiden Beziehungen denken wir uns aus der Flüssigkeit eine zylindrische Stromröhre mit Radius r herausgeschnitten: Infolge des Druckunterschieds Δp wirkt auf diesen Zylinder eine Kraft in der Strömungsrichtung

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2) = \pi r^2 \Delta p$$

Durch das radiale Geschwindigkeitsgefälle dv/dr an der Mantelfläche eine entgegengerichtete Reibungskraft

$$F_\tau = \eta 2 \pi r \frac{dv}{dr}$$

Im stationären Fall herrscht Gleichgewicht

$$\vec{F_p} + \vec{F_\tau} = 0 \quad \Rightarrow \pi r^2 \Delta p + 2 \pi r L \eta \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2 \eta L} r \;\; \text{Integration}: \;\; v(r) = -\frac{r^2 \Delta p}{4 \eta L} + C$$

Die Integrationskonstante C erhalten wir aus der Randbedingung

$$v(r = R) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{R^2 \Delta}{4 \eta L}$$

Damit ist die erste Beziehung bewiesen.

Die Durchflussmenge berechen wir zunächst für einen Hohlzylinder mit gleichem Radius wie die Stromröhre, aber mit der Wandstärke dr. In diesen Hohlzylinder tritt am Ende im Zeitintervall dt durch die Eintrittsfläche $2\pi r dr$ das Wasservolumen $dV = 2\pi r dr \; v(r) dt$ ein.

$$\frac{dV}{dt} = v(r) 2 \pi r dr = \frac{\pi \Delta p (R^2 - r^2)}{2 \eta L} r dr$$

Was im gleichen Zeitintervall durch den gesamten Rohrquerschnitt eintritt erhält man durch Integration:

$$\dot{Q} \equiv \frac{dV}{dt} = \frac{\pi \Delta p}{2 \eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta L}$$

Die Wassermenge M ergibt sich aus $\dot{Q}$ durch Multiplikation mit der Dichte ρ. Bei einer konstanten mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ wäre die Durchflussmenge $\dot{Q} = \pi R^2 \overline{v}$. Damit ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit

$$\overline{v} = \frac{R^2 \Delta p}{8 \eta L}$$

Diesen Zusammenhang können wir benützen, um die gesamte Kraft zu berechnen, die aufgrund der Flüssigkeitsreibung auf das Rohr wirkt. Die auf ein Stück Rohr der Länge L und der Querschnittsfläche πR^2 wirkende Kraft R_v ist gleich der Fläche mal Druckunterschied, also:

$$R_v = \pi R^2 \Delta p = 8\pi\eta L\overline{v}$$

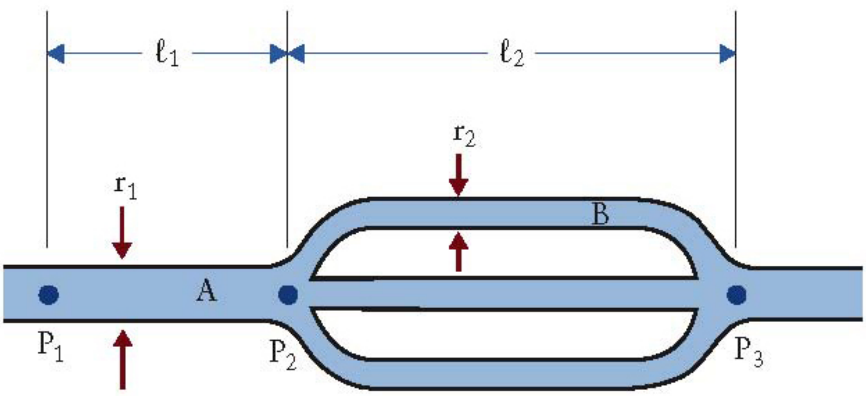
wobei wir die obige Formel für die mittlere Geschwindigkeit verwendet haben. Wie bei der Stokes'schen Reibung an der Kugel, ist auch hier die totale Kraft proportional zu η und v.

Damit die Strömung laminar bleibt, muss $\overline{v} < v_K$ gelten. Überschreitet $\overline{v}$ die kritische Geschwindigkeit, so wird die Strömung turbulent. Bei einer turbulenten Strömung ist die Durchflussmenge kleiner, die Reibung grösser als beim laminaren Fall.

7.8 Die Kirchhoff'schen Gesetze

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass bei Flüssigkeiten mit Reibung ein Druckgefälle nötig ist um einen Fluss in Gang zu halten. Das heisst, ohne äussere Kraft, bzw. Spannung, fliesst keine Flüssigkeit. Diese Gesetzmässigkeit werden wir im nächsten Semester im Zusammenhang mit elektrischen Strömen wieder sehen. Auch dort fliesst ohne das Anlegen einer (elektrischen) Spannung kein Strom. Was wir dem Gesetz von Hagen und Poiseuille auch entnehmen können, ist, dass der Spannungsabfall (Δp) proportional ist zum Fluss ($\dot{Q}$): $\Delta p = R \cdot \dot{Q}$. Die Proportionalitätskonstante R nennt man auch den (Fliess-)Widerstand. Im Zusammenhang mit elektrischen Strömen spricht man hier vom Ohm'schen Gesetz.

Was wir uns jetzt anschauen wollen ist, wie der totale Fliesswiderstand eines Systems von Röhren wie der Blutkrieslauf eines Tiers von den geometrischen Eigenschaften des Netzwerks abhängt. dabei wollen wir uns vorläufig insbesondere mit dem hintereinander und nebeneinander legen von Röhren befassen, wie z.B. in der unten stehenden Figur gezeigt (aus Zinke-Allmang). Was passiert wenn zwei Rohre aus einem anderen hervorgehen?



In einem geschlossenen System, in dem immer die gleiche Flüssigkeit herumgepumpt wird, kann weder Flüssigkeit dazu kommen noch verlorengehen. Das heisst der Fluss in Rohr 1 mus der Summe der Füsse in Rohr 2 und Rohr 3 entsprechen, also:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3$$

Andererseits, muss der Druckabfall über den nebeneinander liegenden Rohren gleich sein. Dieser Druckabfall muss auch demjenigen entsprechen, der über eine Röhre entstehen würde, welche die parallelen Röhren ersetzt. Damit haben wir: $\dot{Q}_2 = \Delta p/R_2$, $\dot{Q}_3 = \Delta p/R_3$ und $\dot{Q}_1 = \Delta p/R_{eff}$. Die letzte dieser Gleichungen besagt, dass durch die Ersatzröhre der einfliessende Fluss fliessen muss. Da wir aber eine Beziehung zwischen den Flüssen haben, können wir den Widerstand der Ersatzröhre bestimmen:

$$1/R_{eff} = 1/R_2 + 1/R_3$$

Dies folgt direkt aus den obigen Beziehungen für die Flüsse, wenn wir durch den Druckabfall (der ja überall gleich ist) teilen. Der totale Widerstand wird also durch den kleinen Widerstand bestimmt. Im Fall von Hagen-Poiseuille geht der Widerstand ja umgekehrt proportional zum Röhrendurchmesser hoch vier, das heisst eine grössere Röhre hat einen kleineren Widerstand. Das heisst, dass der Fluss in diesem Fall vor allem durch die grosse Röhre fliesst.

Andererseits können wir uns überlegen, was mit dem Fliesswdierstand passiert, wenn zwei Röhren hintereinander gelegt sind. Dann muss der Fluss durch beide Röhren gleich sein, also $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$, da Flüssigkeit ja von nirgends kommen kann und auch nirgends hingehen kann. Jede der Röhren führt aber zu einem Druckabfall, $\Delta p_1 = R_1\dot{Q}_1$ und $\Delta p_2 = R_2\dot{Q}_2$ der durch den jeweiligen Fliesswiderstand gegeben ist. Für beide Röhren zusammen ergibt sich ein totaler Druckabfall, der durch die Summe der Abfälle in den beiden Röhren gegeben ist, also $\Delta p_{eff} = \Delta p_1 + \Delta p_2$. Da der Fluss für die Ersatzröhre wieder derselbe sein muss, erhalten wir

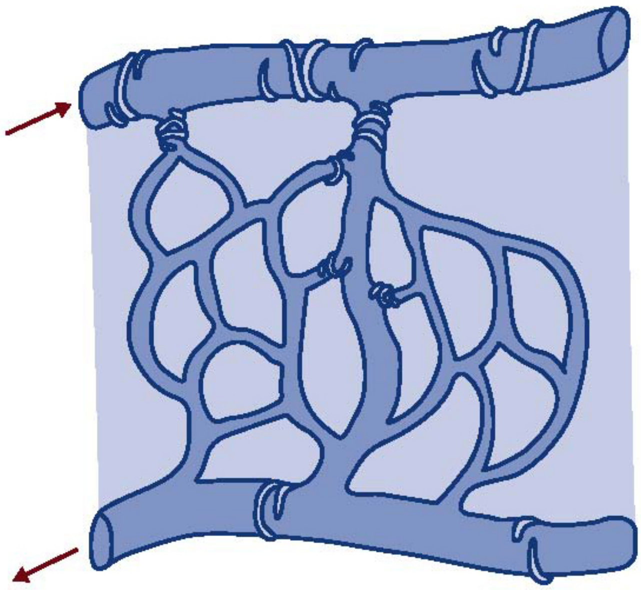
$$R_{eff} = R_1 + R_2.$$

In diesem Fall wird der Widerstand durch den grösseren der Widerstände bestimmt. Das erklärt auch das Verhalten, das wir im Demonstationsexperiment zur Druckverminderung beim Prinzip von Bernoulli gesehen haben. Nach der Verengung war der Druck niedriger, was durch den Druckabfall wegen dem stark erhöten Fliesswiderstand in der engen Röhre erklärt werden kann.

Bei der Berechnung der effektiven Fliesswiderstände haben wir die Kirchhoff'schen Regeln angewandt, die auch für elektrische Ströme gelten: Einerseits gilt die Knotenregel, welche Verweigungen beschreibt: Betrachten wir eine Verzweigung von einer Röhre in mehrere, so ist der Fluss der ankommenden Röhre durch die Summe der Flüsse in den ausgehenden Röhren gegeben. Wie wir oben gesehen haben, lässt sich dies mit der Erhaltung der fliessenden Masse erklären.

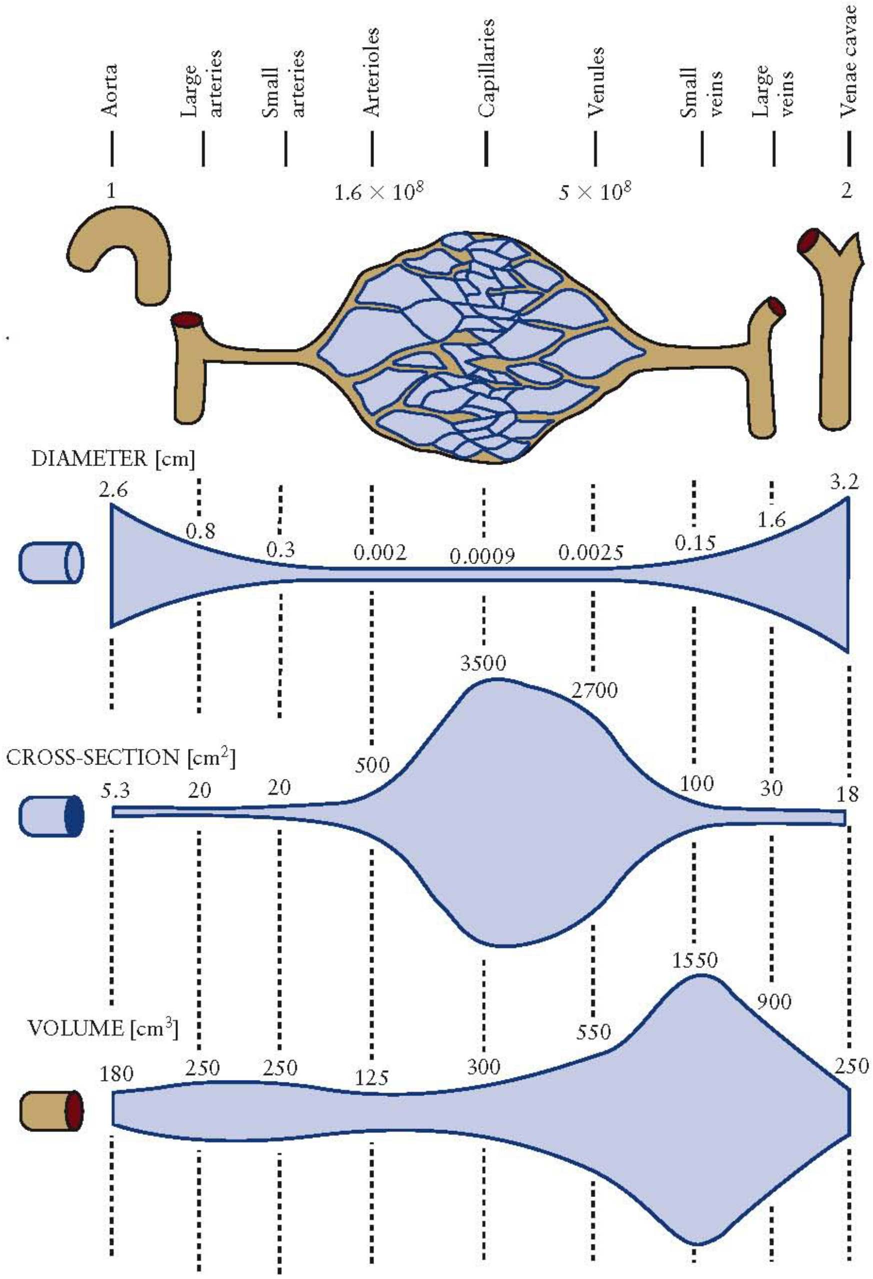
Als zweites haben wir die Maschenregel benützt, welche den Fluss in einem Kreis beschreibt. Sie besagt, dass die Summe der Spannungen in einem solchen Kreis der von aussen angelegten Spannung entspricht.

Diese Regeln für das Fliessen eines Fluids mit Widerstand werden wir im nächsten Semester in der Elektrizitätslehre noch eingehend behandeln. Sie gelten aber wie wir gesehen haben ebenso für Flüssigkeiten, wie zum Beispiel im Blutkreislauf, das aus einem Netzwerk an Gefässen verschiedener Grösse besteht, wie unten gezeigt (aus Zinke-Allmang).



7.9 Strömungsgeschwindigkeiten im Blutkreislauf

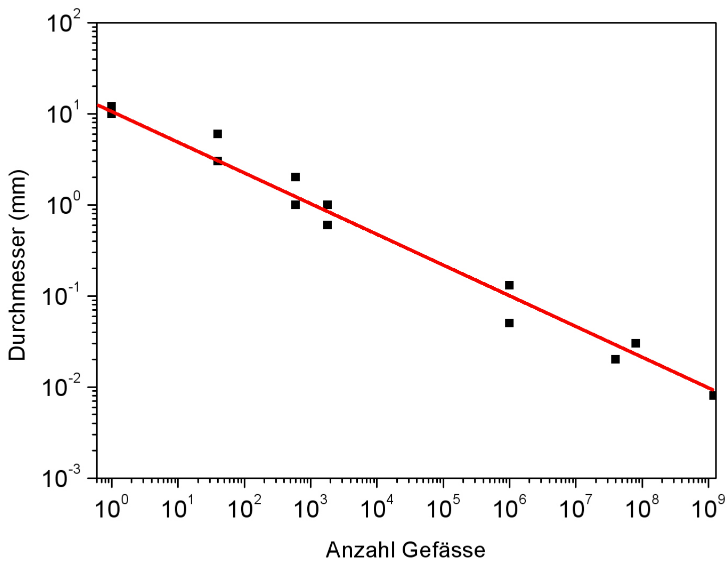
Wir haben nun gesehen, wie Flüssigkeiten in Röhren fliessen, mit welchen Widerständen wir da zu rechnen haben und welche wichtigen Grössen man dabei am Besten betrachtet. Dies wollen wir nun auf den Blutkreislauf anwenden und betrachten, wie Blut durch die verschiedenen Gefässe im Blutkreislauf fliesst. In einem geschlossenen Kreislauf wie dem Blutkreislauf, ist der Fluss bestimmt eine sehr wichtige Grösse. Da der gesamte Blutfluss durch das Herz, bzw. durch die Aorta fliessen muss wissen wir aus einer relativ einfachen Messung des Flusses durch die Aorta gerade den Gesamtfluss durch alle Kapillaren sowie den durch alle anderen Niveaux des verzweigten Blutkreislaufs. Schematisch sind die Verhältnisse (Grösse, Oberfläche und Volumen) der verschiedenen Gefässe unten gezeigt (aus Zinke-Allmang).



Für den Fluss durch eine einzelne Kapillare müssen wir nun noch die Anzahl der Kapillaren wissen, da nach der Knoten-Regel ja der Fluss auf die verschiedenen Unter-Niveaux gleichmässig verteilt sind. Dazu haben wir auch benützt, dass alle Kapillaren mehr oder weniger identisch sind, also den gleichen Fliesswiderstand haben. Dazu wollen wir uns überlegen, wie die Grösse der Röhren im Blutkreislauf vom Niveau der Verzweigung abhängen muss. Wegen der Erhaltung des Volumens ist das die gleiche Frage wie die wie der Fluss durch eine Röhre vom Radius abhängen muss. Dazu überlegen wir uns, was es den Organismus kostet um eine zusätzliche Röhre der Grösse R zu machen.

Einerseits ist da der Fliesswiderstand. Dieser führt zu einer Leistung die verbraucht wird gegeben durch $P = \dot{Q}\Delta p$, bzw. mit dem Gesetz von Hagen-Poiseuille eingesetzt: $P = \frac{8\dot{Q}^2\eta L}{\pi R^4}$, wo L die Länge der Röhre ist. Andererseits kostet das machen eines zusätzlichen Blutgefässes des Material das dazu nötig ist. Diese ist proportional zum Blutvolumen, das dazukommt, also $\pi R^2 L$. Die totalen Kosten sind durch die Summe dieser beiden Terme gegeben, also $K = A\dot{Q}^2/R^4 + BR^2$. Hier sind A und B Konstanten, die davon abhängen wie stark die beiden Kosten relativ sind, sowie von Grössen, die uns hier nicht weiter interessieren wie die Länge der Röhre, die Viskosität etc. Wenn der Fluss optimal auf diese Kosten eingestellt sein soll, muss K minimal sein relativ zu R. Die entsprechende Bedingung erhalten wir also aus $\frac{\partial K}{\partial R} = 0$. Eingesetzt ergibt dies: $\frac{\partial K}{\partial R} = -4A\dot{Q}^2/R^5 + 2BR = 0$ oder $2A\dot{Q}^2 = BR^6$. Das heisst für einen möglichst sparsamen Fluss sollte sich die Grösse der Blutgefässe so einstellen, dass $\dot{Q} \propto R^3$ gilt. Wenn wir also verschiedene Verzweigungsniveuax anschauen, wissen wir dass der Fluss vor der Verzweigung der Summe der Flüsse nach der Verzweigung entspricht. Wenn die Tochterröhren jeweils identisch sind, dann gilt also $N_1 \cdot R_1^3 = N_2 \cdot R_2^3$. Dass dies für die verschiedenen Klassen von Blutgefässen z.B. für einen Hund gilt, lässt sich an der Figur unten sehen, wo die Anzahl verschiederer Gefässe in Abhängigkeit ihrer Grösse doppelt logarithmisch aufgetragen ist. Die Steigung der Kurve ist etwa 1/3 was dem hergeleiteten Exponenten entspricht.

Dies scheint im Widerspruch zu sein mit dem Resultat von Hagen und Poiseuille die ja sagen, dass der Fluss in der Röhre mit der vierten Potenz des Radius gehen sollte. Was stimmt hier nicht? Nun, für jede einzelne Röhre gilt das Gesetz von Hagen und Poiseuille immer noch - die Grössen un d Fliessgeschwindigkeiten in Blutgefässen entsprechen einer laminaren Strömung und damit haben ein Geschwindigkeitsprofil das durch eine Parabel beschrieben ist in jeder einzelnen Röhre. Allerdings kann der Druckabfall den wir in einer Röhre im Blutkreislauf haben auch von ihrem Radius abhügen. Wenn wir fordern, dass $\Delta p/L \propto 1/R$ gilt, dann wird der Fluss optimal durch den Blutkreislauf verteilt. Dies muss biologisch reguliert werden. Welche weiteren Folgen hat es für den Blutfluss, wenn der Fluss im System wie R^3 geht?



Betrachten wir die mittlere Fliessgeschwindigkeit: wenn $\dot{Q} \propto R^3$ ist so muss $\langle v \rangle = \dot{Q}/(\pi R^2) \propto R$ gelten. Die fliessgeschwindigkeit ist also direkt zur Grösse des Blutgefässes proportional! Das heisst die Scherspannung auf dem Blutgefäss, die ja direkt der Scherrate proportional ist ist gegeben durch $dv/dr = const$. Die Scherspannung am Blutgefäss ist also im gesamten Blutkreislauf konstant. Das muss sie sein, soll der Fluss optimal reguliert werden. Das heisst, mit einer mechanischen Induktion des Röhrenwachstums können wir einen solchen optimalen Fluss regulieren. Wenn die Scherspannung nicht mehr derjenigen im Rest des Kreislaufs entspricht, dann muss die Röhre entweder wachsen oder schrumpfen. Das Wachstum von Gewebe von Blutgefässen regagiert denn auch auf Scherspannungen.

7.10 Die Grösse von Kapillaren

Schliesslich wollen wir uns noch die Grösse von Kapillaren überlegen. Kapillaren geben die Grösse an bei der der Transport durch Diffusion effizienter wird, als derjenige durch einen makroskopischen Fluss. Das ist nicht unähnlich wie die Instabilität die zur Konvektion führt. Auf kleinen Längenskalen ist die Diffusion sehr effizient im Materialtransport. Auf grossen Skalen überhaupt nicht. Bei einer Kapillare muss also gelten, dass die Strömungsgeschwindigkeit der Kapillare, v_{Kap} kleiner sein muss als die Geschwindigkeit des Transport durch Diffusion: $6D/R_{Kap}$. Die Bedingung wird also: $v_{Kap} = 6D/R_{Kap}$. Hier müssen wir nun mit der Überlegung aus dem letzten Abschnitt die Geschwindigkeit zu Hilfe nehmen. Wir haben uns überlegt, dass die Anzahl der Kapillaren gegeben ist durch $N = (R_{Aorta}/R_{Kap})^3$ und der totale Fluss gegeben ist durch $\dot{Q}_{tot} = N\dot{Q}_{Kap} = Nv_{Kap}\pi R_{Kap}^2 = \pi R_{Kap}^2 (R_{Aorta}/R_{Kap})^3 6D/R_{Kap} = 6\pi D R_{Aorta}^3/R_{Kap}^2$. Das gibt uns für die Grösse der Kapillaren: $R_{Kap} = \sqrt{6\pi D R_{Aorta}^3/\dot{Q}_{tot}}$. Wenn wir typische Diffusivitäten für Sauerstoff in Blut, $D = 2000\mu m^2/s$ einsetzen, erhalten wir für die Grösse der Kapillaren: $R_{Kap} \simeq 6\mu m$, was genau der Gr@osse entspricht die man bei fast allen Tieren findet. Die Grösse kann auch nicht vom Tier abhängig sein, da ja der Fluss wie die dritte Potenz der Grösse zunimmt, das heisst in unserer obigen Bedingung stehen nur allgemeine Konstanten, die nicht von der Grösse oder Art des Tieres abhängig sind.