Was ist der Unterschied zwischen einer Flüssigkeit und einem Festkörper?

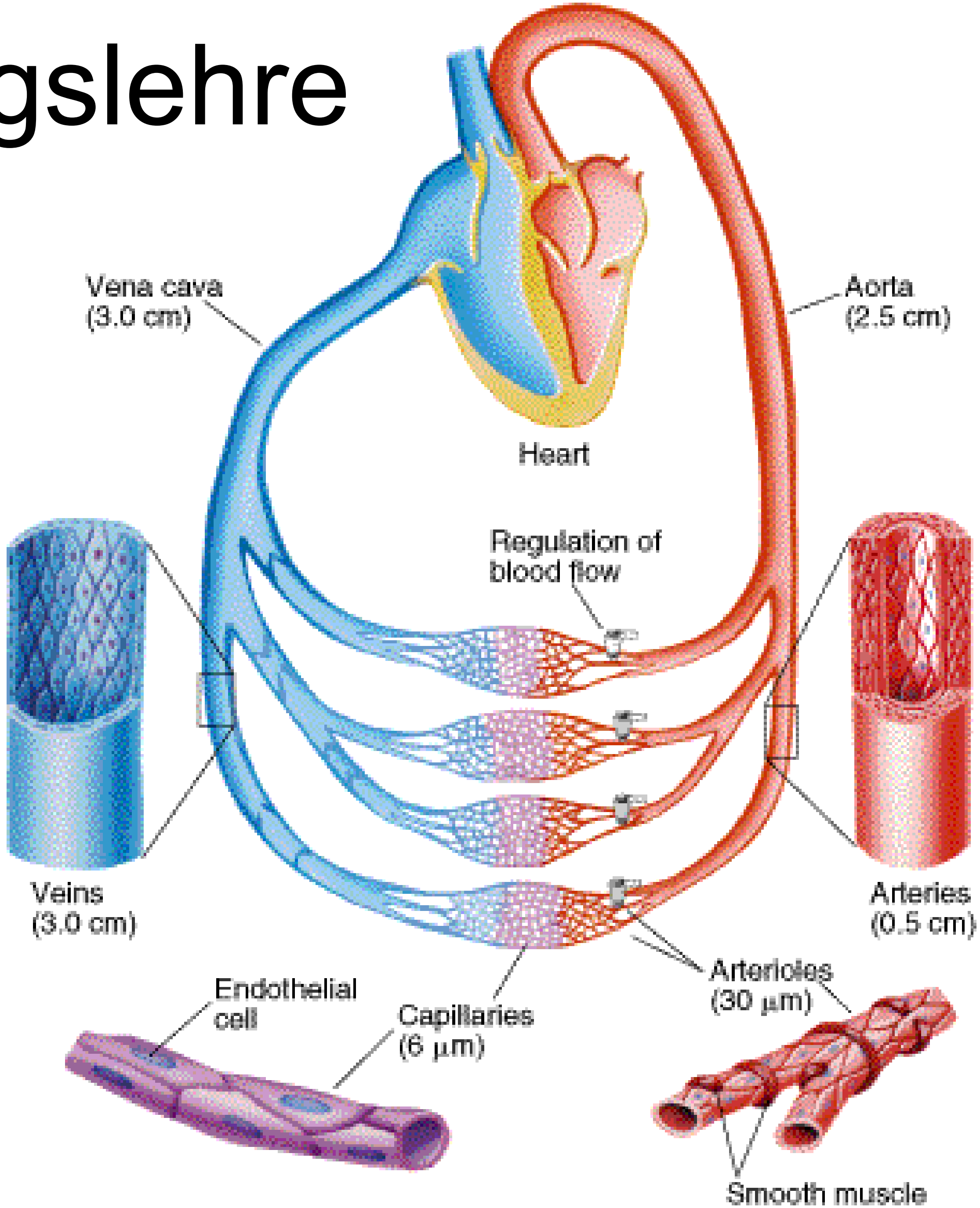
A die geordnete Molekularstruktur

B die Bindungsstärke

C es gibt keinen

D Flüssigkeiten haben kein Schermodul

7. Strömungslehre



7.1. Stromdichte und Kontinuität

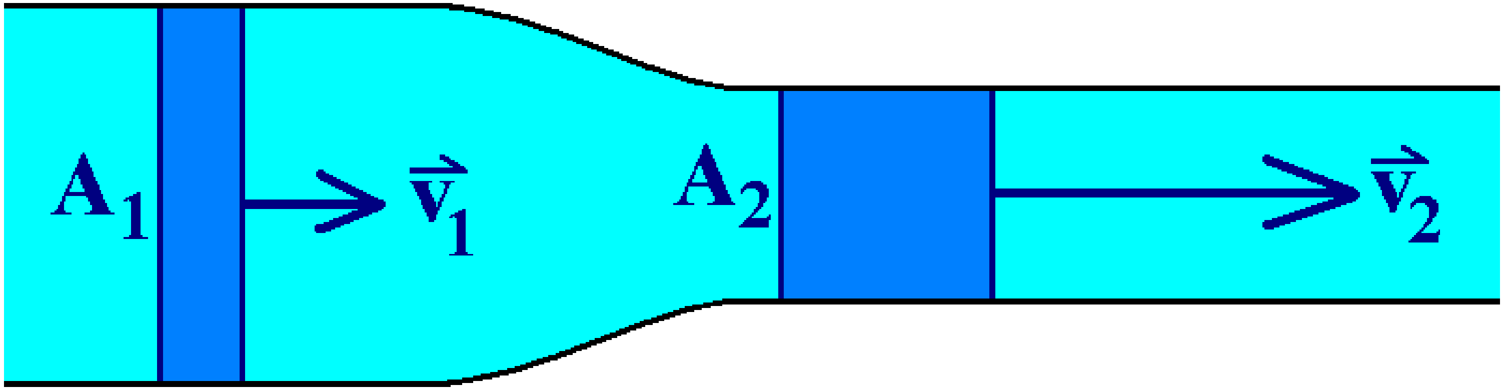
Wir wollen uns jetzt den Fluss durch Röhren angeschauen:

$$Q = dm/dt$$

Eine andere wichtige Grösse ist die Stromdichte:

$j = Q/A = \rho\ dV/dt\ 1/A = \rho\ dx/dt = \rho\ v$

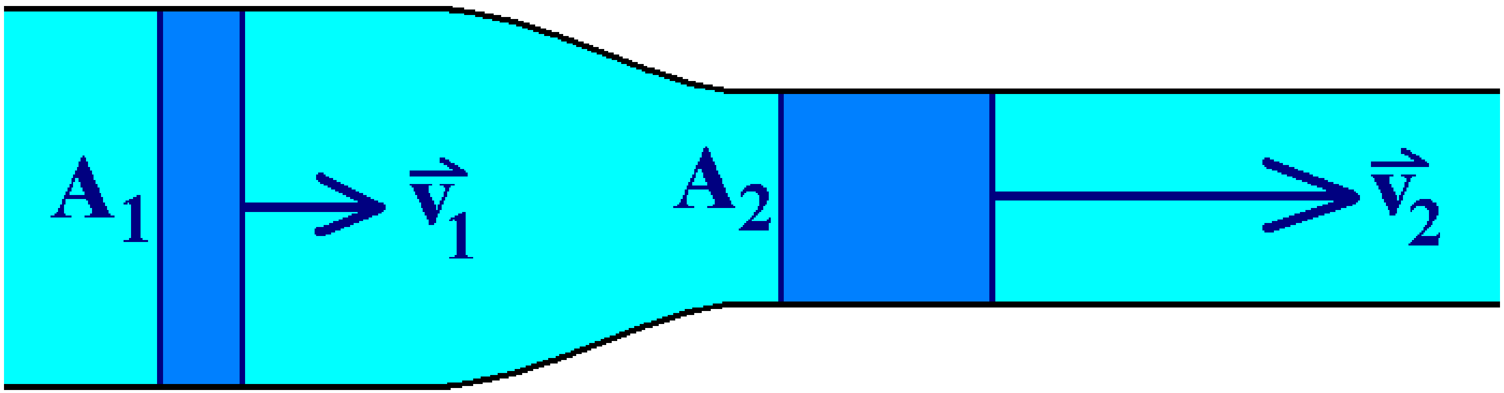
Wo ist die Geschwindigkeit höher?



A rechts

B links

Was passiert mit dem Fluss bei einer Verengung?



Der Fluss muss in beiden Röhren gleich sein, die Stromdichte nimmt aber zu.

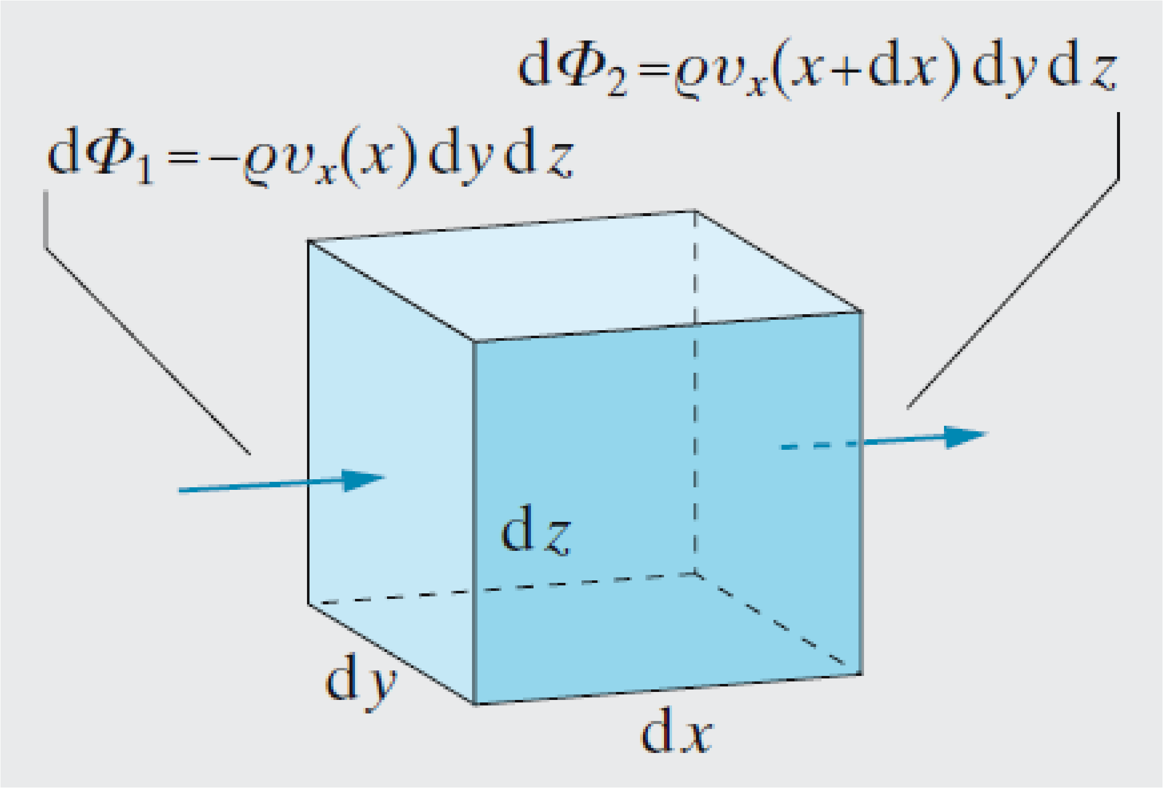
Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \qquad \rho \frac{dV_1}{dt} = \rho \frac{dV_2}{dt}$$

$$\rho A_1 \frac{dl_1}{dt} = \rho A_2 \frac{dl_2}{dt}$$

$$\boxed{A_1 \left|\mathbf{v_1}\right| = A_2 \left|\mathbf{v_2}\right|}$$

Die allgemeine Kontinuitätsgleichung



$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = \varrho \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \varrho \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}\Phi = \varrho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = -\dot{\varrho}\,\mathrm{d}V$$

Um wieviel muss sich im Stossverkehr die Geschwindigkeit auf der Autobahn ändern, wenn 3 Spuren zu 2 werden?

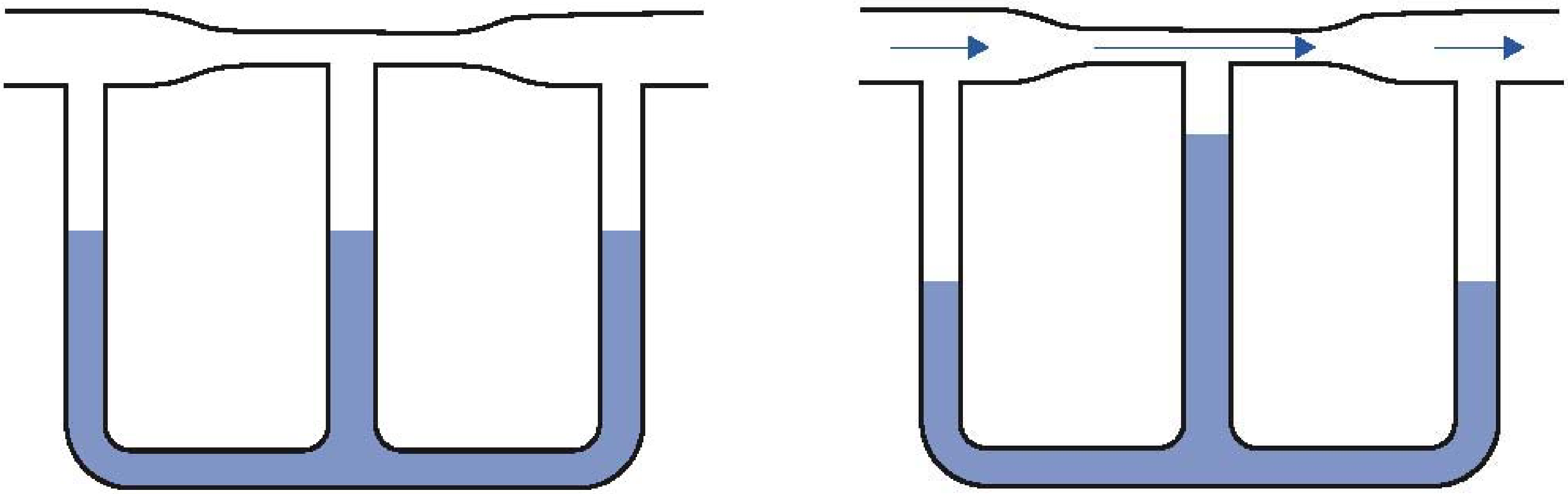
- A gar nicht
- B auf die Hälfte
- C auf zwei Drittel
- D verdoppeln
- E um 50% erhöhen

Damit lässt sich auch Diffusion mit Hilfe von Stromdichten beschreiben:

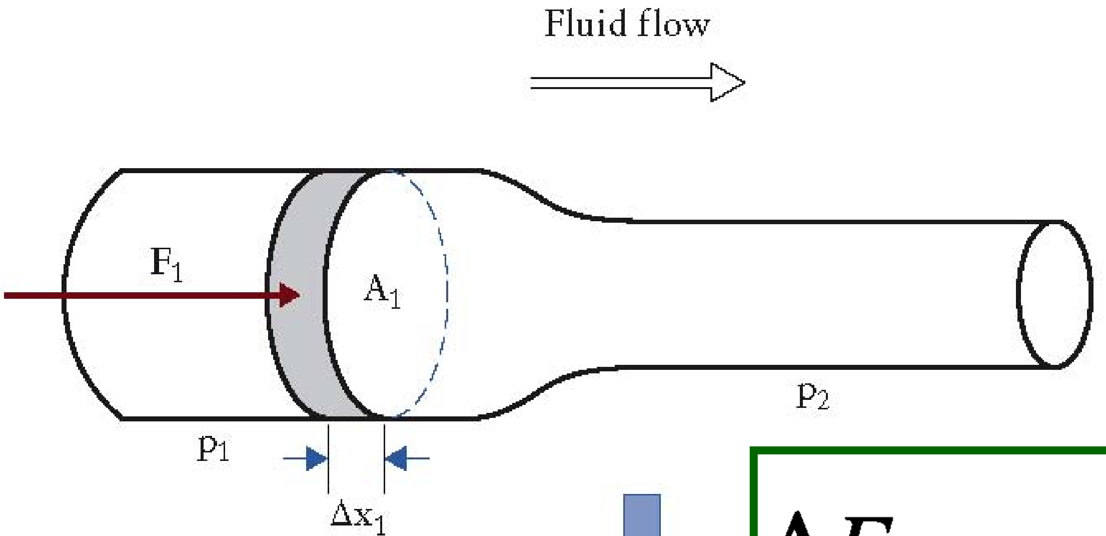
Wir haben gesehen, dass ein Dichtegradient einen Strom hervorruft: $j = -D\, d\rho/dx$

Mit der Kontinuitätsgleichung erhalten wir die Diffusionsgleichung.

Ein Fluss ändert auch den Druck im dünneren Rohr

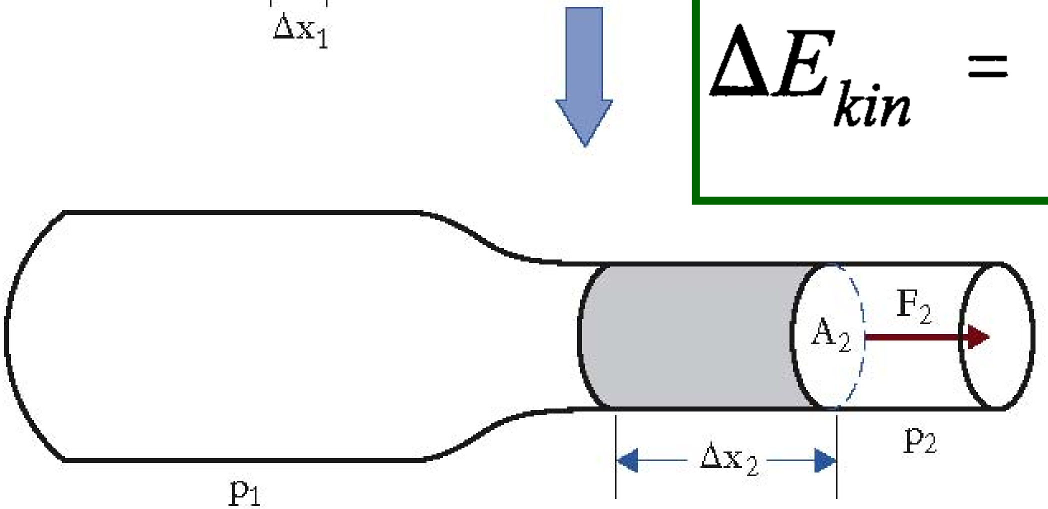


Betrachte die Aenderung der kinetischen Energie



$E_{kin,1} = ½ \Delta m (v_1)^2$

$$\boxed{\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)\Delta V}$$



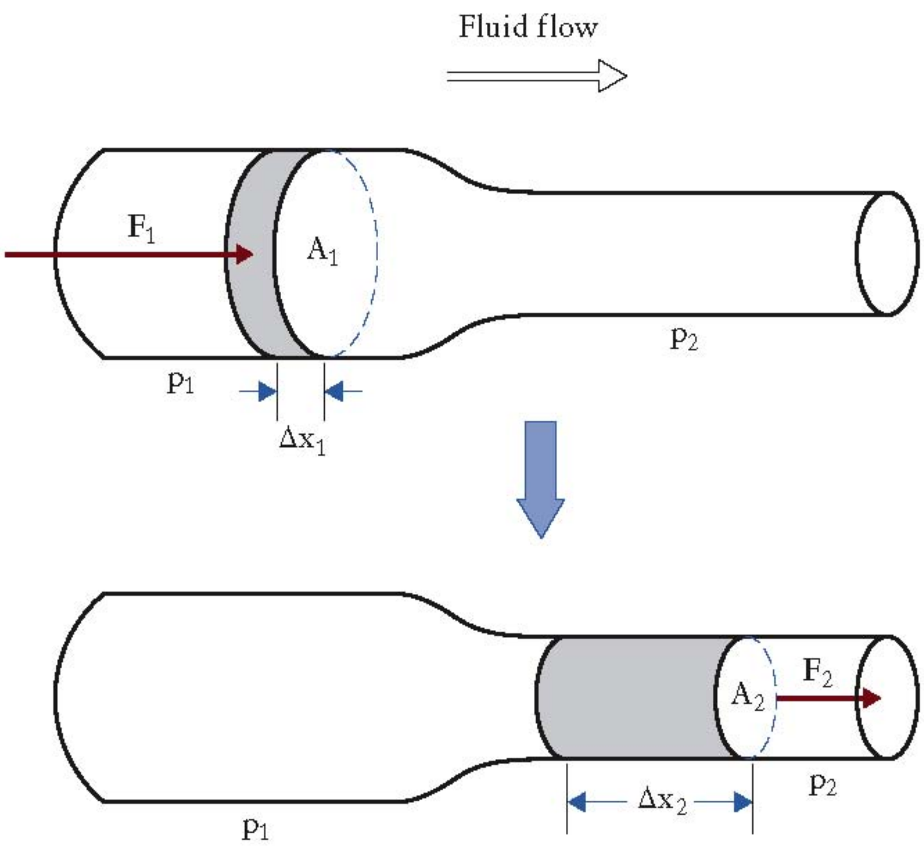
$E_{kin,2} = ½ \Delta m (v_2)^2$

Betrachte die nötige Arbeit

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} p \, dV$$

$$= -\int_{0}^{\Delta V} p_2 \, dV - \int_{\Delta V}^{0} p_1 \, dV$$

$$= -p_2 \, \Delta V - p_1 \, (-\Delta V)$$



$$\boxed{W = -(p_2 - p_1)\Delta V}$$

Wie häufig muss ich blasen um einen 35l Abfallsack aufzublasen?

- A 0-1 mal
- B 6-10 mal
- C 25-30 mal
- D über 100 mal

Satz von Bernoulli

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}\,\rho\,\left(v_2^2 - v_1^2\right)\Delta V \qquad W = -\left(p_2 - p_1\right)\Delta V$$

$$W = \Delta E_{kin}$$

$$\left(p_1 - p_2\right)\Delta V = \frac{1}{2}\,\rho\,\left(v_2^2 - v_1^2\right)\Delta V$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\,\rho\,v_2^2$$

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\,\rho\,v^2 = const}$$

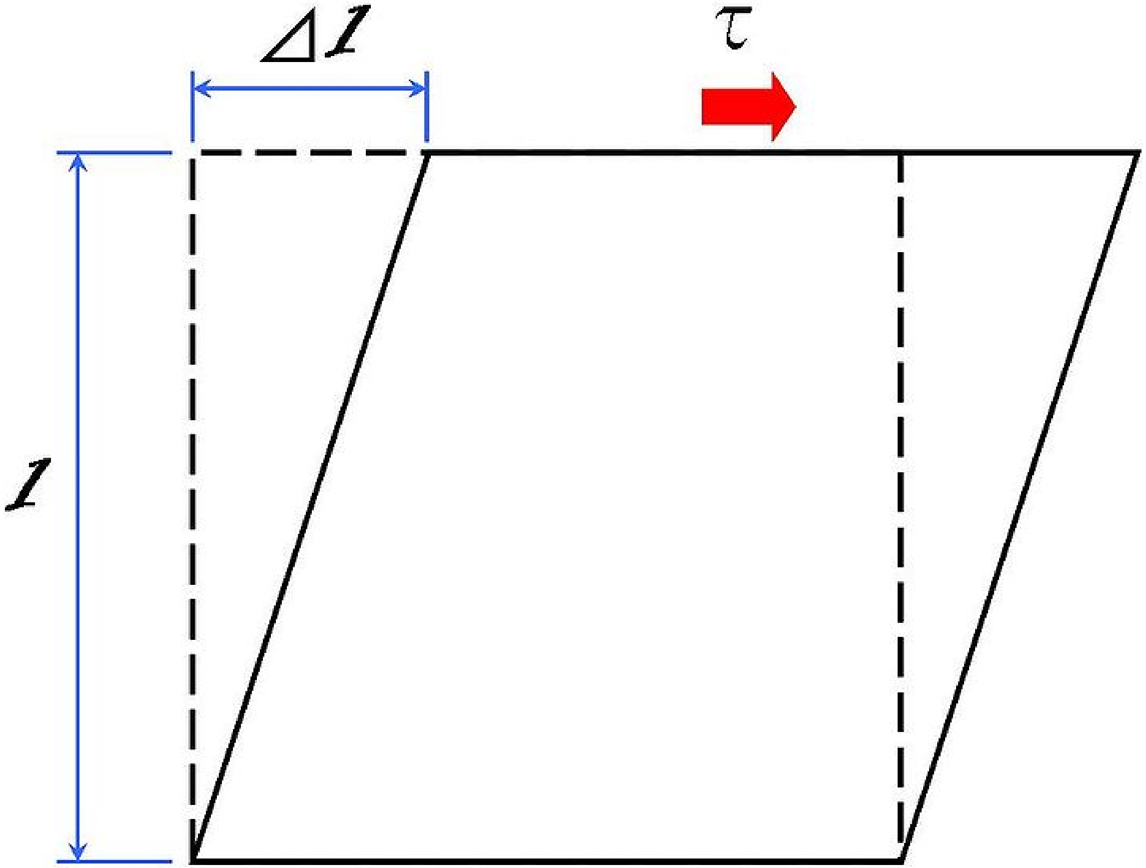
7.2. Viskosität und Reibung

Bei einer Scherung reagiert eine Flüssigkeit anders als ein Festkörper: Es gibt keine Rückstellkraft! Das heisst, dass bei einer Flüssigkeit eine Scherspannung mit einer Aenderung einer Scherung, einer Scherrate verbunden wird.

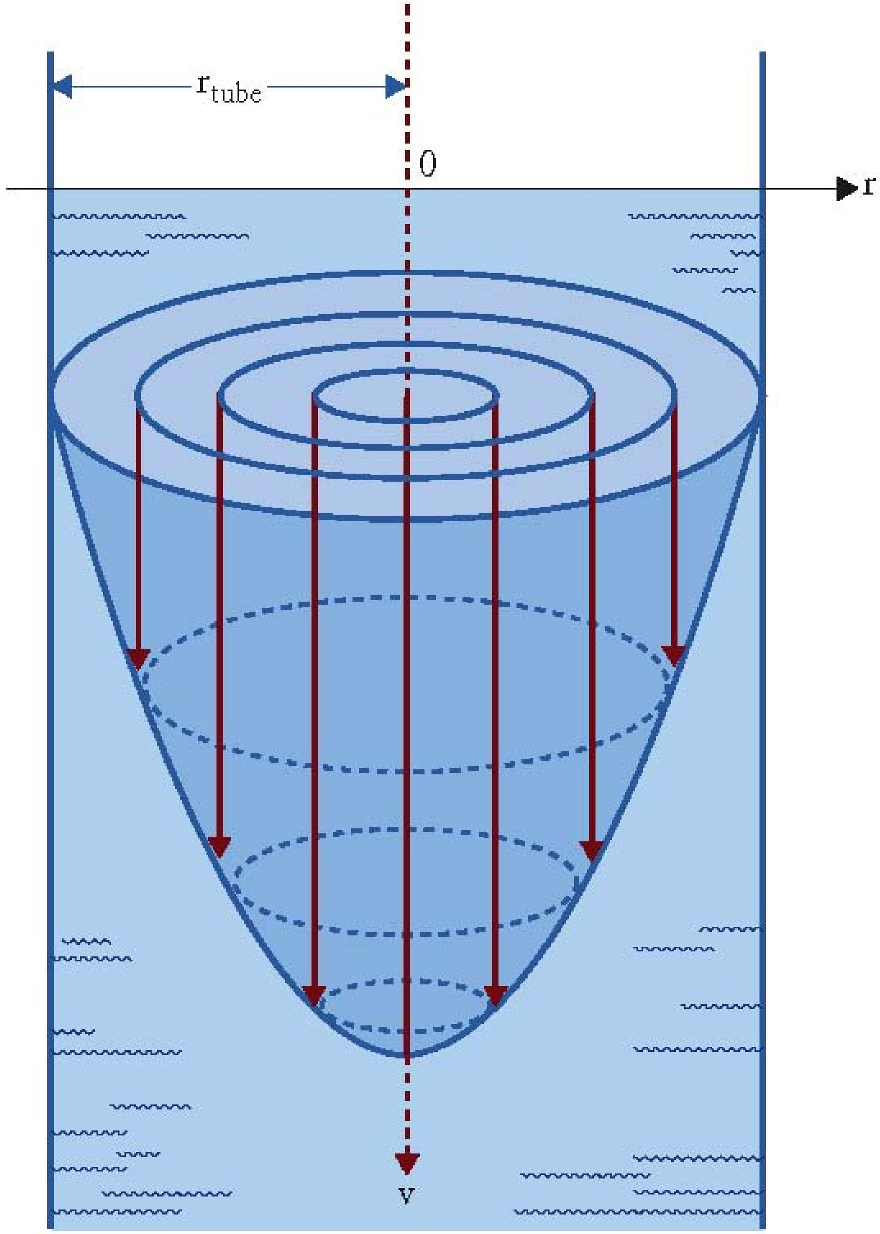
$$\eta = \tau/\dot{\gamma}$$

Vergleich: $G = \tau/\gamma$

Kommen wir zurück zu den Festkörpern – was macht einen festen Stoff aus?



Festkörper widerstehen einer Scherung



Geschwindigkeitsprofil in einer Röhre

$$\boldsymbol{F} = \eta A \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}z}$$

$$v(r) = \frac{r_{tube}^2 - r^2}{4\,\eta}\,\frac{\Delta p}{l}$$

Poiseuille Strömung

Integrieren über die Querschnittsfläche ergibt das totale Volumen das durch die Röhre strömen kann.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi}{8\ \eta} \frac{r_{tube}^{4}}{l} \Delta p$$

Also ist der Strom an Flüssigkeit proportional zum angelegten Druck

Wodurch ist der Durchfluss in einem Rohr mit Radius R gegeben?

A R

B R^2

C R^3

D R^4

Fliesswiderstand

Wir haben letztes Semester für den Fluss durch eine Röhre das Gesetz von Hagen-Poiseuille gesehen:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi}{8\ \eta} \frac{r_{tube}^{4}}{l} \Delta p$$

$$\boxed{\Delta p = R \frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

Ohm'sches Gesetz

Was ist falsch an diesem Argument?

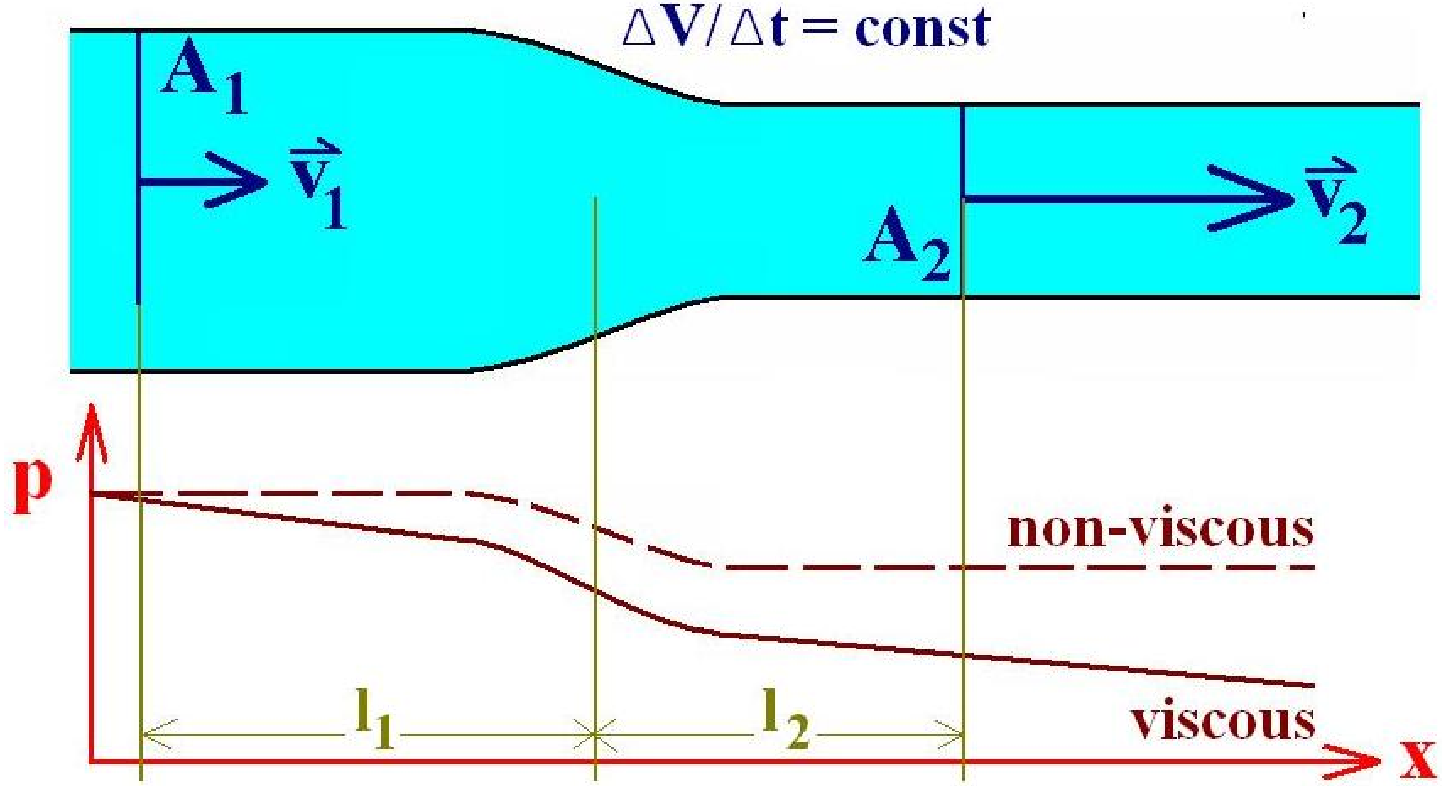
A die Gesetze haben einen unterschiedlichen Geltungsbereich

B etwas wurde bei Hagen-Poiseuille vernachlässigt

C Nichts – Physik macht keinen Sinn

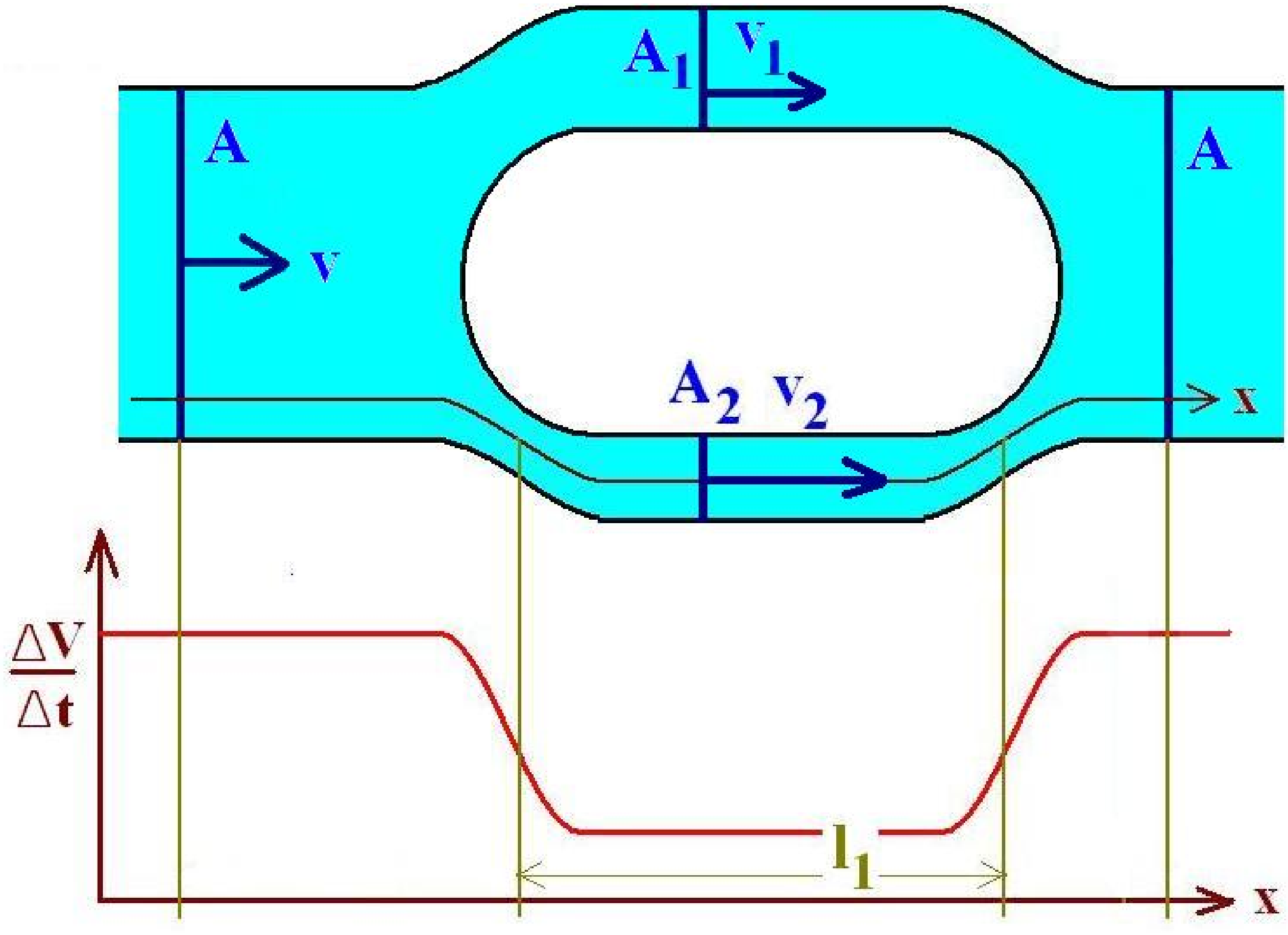
D etwas wurde in der Kontinuitäts-Gleichung vernachlässigt

Strömungsnetze



Effektiver Widerstand in Serie:

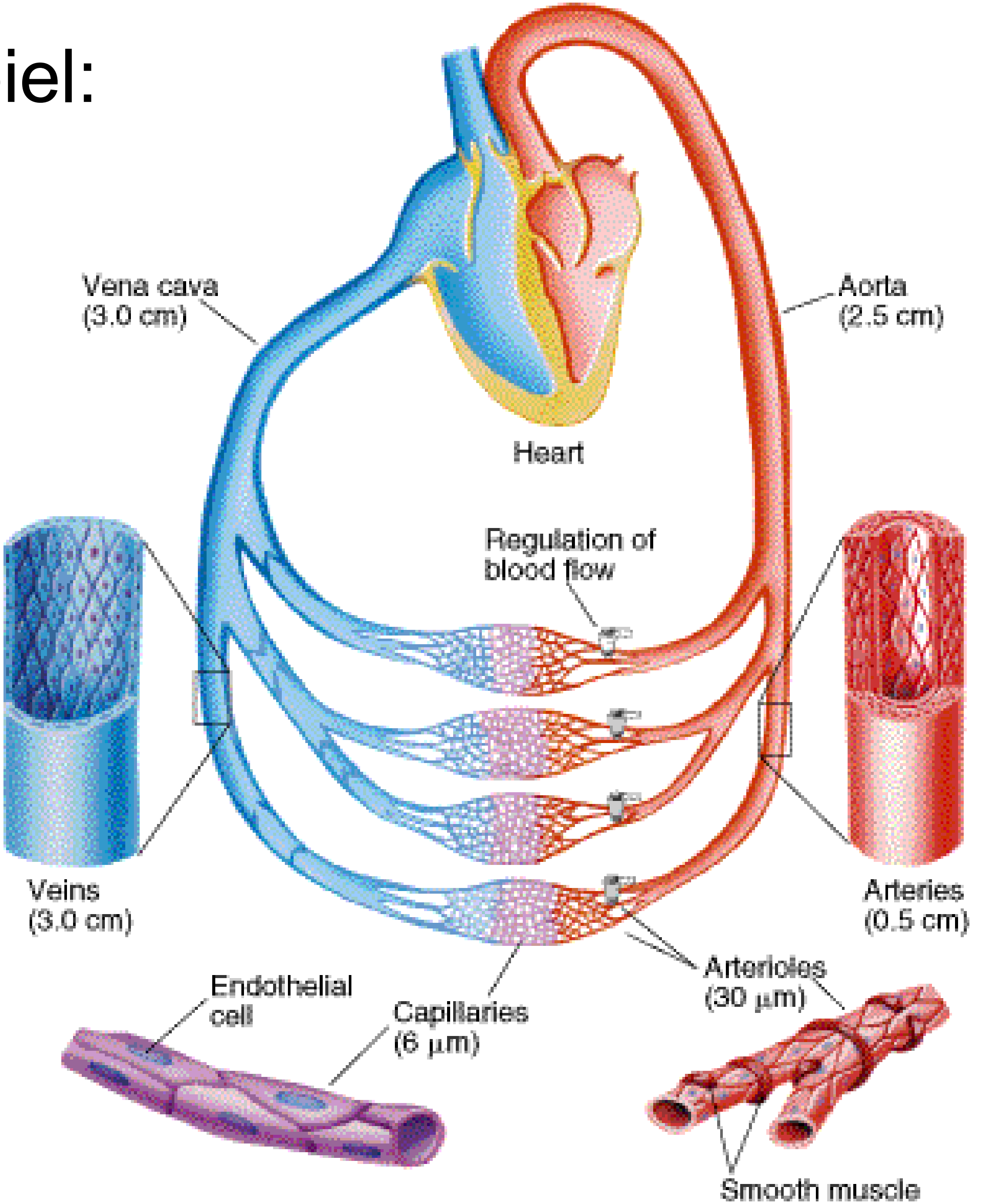
$$R_{eff} = R_1 + R_2$$



Effektiver Widerstand in parallel:

$$1/R_{eff} = 1/R_1 + 1/R_2$$

Ein weiteres Beispiel: Verzweigungen in “fraktalen” Gefässsystemen (Blutkreislauf)



Die benötigte Leistung für einen Fluss

$$Kosten = Qp + K(\pi r^2 L)$$

Bei optimalem Fluss sind die Kosten minimal

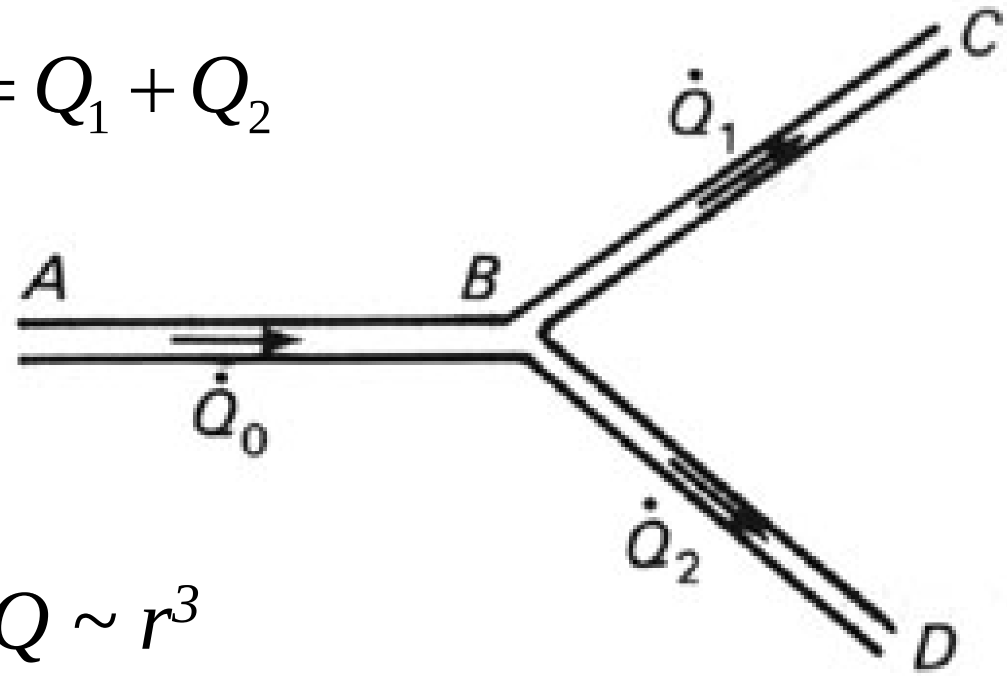
$$\frac{\partial C_o}{\partial r} = \frac{-32\eta L}{\pi r^5} Q^2 + 2K\pi r L = 0 \qquad r = \left(\frac{16\eta L}{\pi^2 K}\right)^{1/6} Q^{1/3}$$

Damit ist in einem optimalen System

$$\text{Min.Kosten} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} K L r^2$$

Woher kommt das?

Kontinuität $Q_o = Q_1 + Q_2$

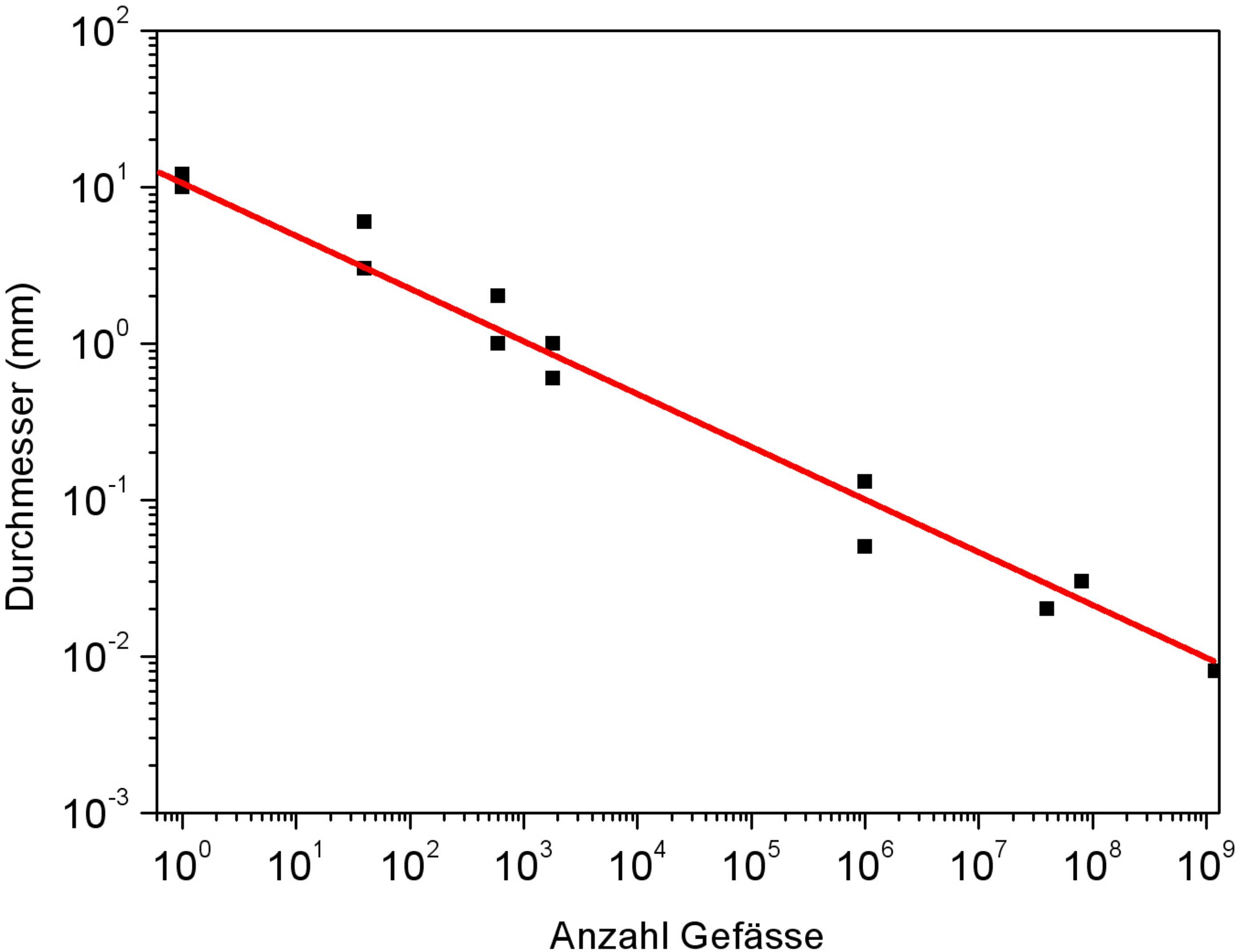


Optimaler Fluss $Q \sim r^3$

Also muss für jedes Verzweigungsniveau gelten:

$$\sum r^3 = \text{konst}$$

Das stimmt auch mit experimentellen Daten überein (hier von einem Hund)



Auch dieses Skalengesetz wird durch selbstreguliertes Wachstum erreicht

Wenn die Grösse der Gefässe dem Fluss$^{1/3}$ entspricht ergibt sich für die Scherkraft am Rand des Gefässes:

$$\tau_w = -\frac{r}{2}\frac{dp}{dx} = -\frac{4\eta}{\pi r^3} Q = -\left(\frac{\mathrm{K}\,\eta}{\mathrm{L}}\right)^{1/2}$$

Damit ist die Kraft entlang des gesamten Systems konstant

Wie gross werden Kapillaren?

Aktiver Transport wird nicht mehr benötigt wenn Diffusion effektiver ist. Auf dieser Längenskala sind auch die Kapillaren angesiedelt

$$\Delta x/\Delta t = v = r/\tau = r^2/4\eta * \Delta p/\Delta L$$

$$2D\tau = r^2 \Rightarrow r/\tau = 2D/r$$

$$r^2/4\eta * \Delta p/\Delta L = 2D/r \Rightarrow r = (8D\eta\Delta L/\Delta p)^{1/3}$$

Auf grösseren Skalen muss der Transport also anders zustande kommen

Makroskopische Flüsse durch Druckunterschied haben wir schon gesehen – eine andere Möglichkeit ist Konvektion, wenn Wärmetransport und Viskosität zusammenarbeiten

Hierbei entstehen auch räumliche Muster