Übung 1. *[Green'sche Funktion der Helmholtz Gleichung]*

Verifizieren Sie, dass die Funktionen $G_\pm(\vec{x},\vec{x}')$ aus der Vorlesung

$$G_\pm(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|},$$

Green'sche Funktionen der Helmholtz Gleichung sind. Zeigen Sie hierzu

$$\left(\Delta + k^2\right) G_\pm(\vec{x},\vec{x}') = \delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}'\right).$$

Lösung. Die Green'sche Funktion lautet $G_\pm(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\pm ikr)}{r}$. Für $r \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G_\pm(r)}{\partial r}\right) + k^2 G_\pm(r) &= -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\pm ikre^{\pm ikr} - e^{\pm ikr}\right) - \frac{k^2}{4\pi r}e^{\pm ikr}\\ &= -\frac{1}{4\pi r^2}\left((\pm ik)^2 re^{\pm ikr} + k^2 re^{\pm ikr}\right) = -\frac{1}{4\pi r^2}\left(-k^2 r + k^2 r\right)e^{\pm ikr} = 0\,,\end{aligned}$$

Für $r \to 0$,

$$\left(\Delta + k^2\right) G_\pm(r) \to -\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right).$$

Eine Kugel mit Radius r and Mittelpunkt im Ursprung benutzend,

$$\begin{aligned}\int dV\ \ -\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right) &= \int dS\ \nabla\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\cdot\vec{r}\\ &= \int r^2 dr d\theta d\phi \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \int \frac{1}{4\pi} d\theta d\phi \sin\theta = 1.\end{aligned}$$

So,

$$\int dV\left(\Delta + k^2\right) G_\pm(\vec{x},\vec{x}') = \begin{cases} 0 & \text{für } r \neq R,\\ 1, & \text{für } r = 0.\end{cases}$$

Übung 2. *[Born'sche Näherung: Streuung am δ-Potential]*

a) *Zeigen Sie, dass man für ein sphärisch symmetrisches δ-Potential $V(\vec{r}) = g\ \delta^3(\vec{r})$ mittels Born'scher Näherung für die Streuamplitude das Ergebnis*

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar}g$$

erhält. Dabei ist $\delta^3(\vec{r})$ eine 3-dimensionale δ-Funktion und g eine Konstante.

b) *Leiten Sie einen Ausdruck für g her, wenn das Potential für die Modellierung der Streuung thermischer Neutronen mit der Streulänge b verwendet wird.*

Lösung. a)
Die Streuamplitude ist in Born'scher Näherung gegeben durch

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} I,$$

mit $I = \int V(\vec{r}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3r$.
Für $V(\vec{r}) = g\ \delta^3(\vec{r})$ wird der Exponentialterm an der Stelle $\vec{r} = 0$ ausgewertet. Also ist $I = g$ und damit folgt das Ergebnis.
b)
Da g eine Konstante ist, ist auch $f(\theta)$ eine Konstante, die, für die Streuung thermischer Neutronen, gerade $-b$ ist, wobei b die Streulänge ist. Also gibt in Born'scher Näherung die Delta-Funktions-Form des Potentials die benötigte Streulänge b, vorausgesetzt, man wählt g zu

$$g = \frac{2\pi\hbar^2}{m_n} b$$

mit der Neutronenmasse m_n.

Übung 3. *[Kern–Nukleon Streuung]*

Ein Nukleon wird elastisch an einem schweren Kern gestreut. Der Effekt des schweren Kerns kann durch das Potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \textit{für } r < R, \\ 0, & \textit{für } r > R, \end{cases}$$

dargestellt werden, wobei V_0 eine positive Konstante ist. Berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt in führender Ordnung in V_0.

Lösung. μ sie die reduzierte Masse des Nukleons und des Kerns, $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ wobei $\vec{k}'$ und $\vec{k}$ die Wellenzahhlvektoren des Nukleons vor und nach dem Streuprozess sind. In der Born'scher Näherung ist,

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2} |\int_0^\infty r' V\left(r'\right) \sin\left(qr'\right) dr'|^2 = \frac{4\mu^2 V_0^2}{\hbar^4 q^6} \left(\sin\left(qR\right) - qR \cos\left(qR\right)\right)^2,$$

wobei $q = 2k \sin \frac{1}{2}\theta$, $k = |\vec{k}| = |\vec{k}'|$.

Übung 4. *[Born'sche Näherung]*

Verwenden Sie die Born'sche Näherung um den differentiellen Streuquerschnitt eines Teilchens der Masse m in einem abstoßenden Streu-Potential $V = A \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$ zu bestimmen.

Lösung. In Born'scher Näherung gilt,

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r V(r) \sin(qr)\, dr,$$

wobei $q = 2k \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$, $\hbar k$ der Impuls des eintreffenden Teilchens ist.

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{2mA}{\hbar^2 q}\int_0^\infty r e^{-r^2/a^2}\sin(qr)\,dr \\
&\overset{\text{gerade}}{=} -\frac{mA}{\hbar^2 q}\int_{-\infty}^\infty r e^{-r^2/a^2}\sin(qr)\,dr \\
&= \frac{mAa^2}{2\hbar^2 q}\int_{-\infty}^\infty \frac{d}{dr}\left(e^{-r^2/a^2}\right)\sin(qr)\,dr = -\frac{mAa^2}{2\hbar^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-r^2/a^2}\cos(qr)\,dr \\
&= -\frac{mAa^3}{2\hbar^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-r^2}\cos(qar)\,dr = -\frac{mAa^3}{4\hbar^2}\int_{-\infty}^\infty \left(e^{-(r-\frac{iqa}{2})^2}+e^{-(r+\frac{iqa}{2})^2}\right)e^{-q^2a^2/4}dr\,,
\end{aligned}
$$

Wenn man jetzt ra für r substituiert, und mit $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$.
Folglich, mit $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$,

$$
f(\theta) = -\frac{mAa^3}{2\hbar^2}\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{q^2a^2}{4}\right),
$$

und schlussendlich

$$
\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{m^2A^2a^6}{4\hbar^4}\pi\exp\left(-\frac{q^2a^2}{2}\right).
$$