Übung 1. *[Störungstheorie]*

Man überzeuge sich von der Richtigkeit der allgemeinen störungstheoretischen Lösung für $|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \left(T\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V(t')\mathrm{d}t'}\right)|\psi(t_0)\rangle\,, \tag{1}$$

indem man zunächst die Lösung in 2. Ordnung in $V(t)$ untersucht und dann jene n-ter Ordnung. Dabei bezeichnet T den Zeitordnungsoperator.

Lösung. Die Zeitevolution im Wechselwirkungsbild ist durch die Schödinger Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial \psi_I}{\partial t} = V(t)\,\psi_I(t)$$

beschrieben. Die Zeitentwicklung eines Zustandes kann aber auch durch ein Zeitentwicklungsoperator ausgedrückt werden:

$$|\psi_I(t)\rangle = U(t,t_0)\;|\psi_I(t_0)\rangle\;.$$

Setzt man das in der Schrödinger Gleichung ein, so findet man

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial\, t}U(t,\,t_0) = V(t)\,U(t,\,t_0)\,.$$

Eine dazu equivalente Integralgleichung (mit der Randbedingung, dass $U(t_0,t_0)=1$) ist

$$U(t,\,t_0) = 1\,+\,\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,V(t')\,U(t',t_0)$$

die iterativ gelöst werden kann. Setzt man $U_{-1}(t,\,t_0)=0$ und $U_0(t,\,t_0)=1$ so findet man zum Beispiel

$$\begin{aligned}
U_1(t,\,t_0) &= 1\,+\,\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1'\,V(t_1') \\
U_2(t,\,t_0) &= 1\,+\,\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1'\,V(t_1')\,+\,\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1'\int_{t_0}^{t_1'}\mathrm{d}t_2'\,V(t_1')V(t_2') \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wir definieren nun den Operator $\Delta_n(t,\,t_0)$ als die Differenz

$$\Delta_n(t,\,t_0)\;=\;U_n(t,\,t_0) - U_{n-1}(t,\,t_0)$$

Die Zeitevolution ist dann durch die Reihenentwicklung

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$$

gegeben, und es gilt

$$\Delta_n(t,t_0) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' V(t')\Delta_{n-1}(t',t_0)\,.$$

Die Behauptung ist nun:

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= T\exp\left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t} V(t)\mathrm{d}t)\right)|\psi(t_0)\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^n}\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_n\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_1\,T(V(t'_n)\cdots V(t'_1))}_{\bar{\Delta}_n(t,t_0)}|\psi(t_0)\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\bar{\Delta}_n(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle\ ,
\end{aligned}
$$

und deshalb muss gelten

$$
\bar{\Delta}_n(t,t_0) \stackrel{!}{=} \Delta_n(t,t_0)\,.
$$

Wir zeigen dies mittels Induktion. Die Fälle $n=0,1$ sind trivial. Für $n=2$ gilt (wir vereinfachen hier die Notation bei Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit der Δ_n Operatoren),

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{i}\hbar)^2\bar{\Delta}_2 &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_1\,T\left(V(t'_2)V(t'_1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_2\int_{t_0}^{t'_2}\mathrm{d}t'_1\,V(t'_2)V(t'_1) + \underbrace{\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_1\int_{t_0}^{t'_1}\mathrm{d}t'_2\,V(t'_1)V(t'_2)}_{\text{Umbenennung } t'_1\leftrightarrow t'_2}\right) \\
&= \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_2\int_{t_0}^{t'_2}\mathrm{d}t'_1\,V(t'_2)V(t'_1) = (\mathrm{i}\hbar)^2\Delta_2\,.
\end{aligned}
$$

Wir nehmen nun an, dass es für $n-1$ gilt und zeigen, dass es dann auch für n gilt:

$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta}_n(t) &= \frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^n}\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_n\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_1\,T\left(V(t'_n)\cdots V(t'_1)\right) \\
&= \frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^n}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}S_k
\end{aligned}
$$

wobei wir mit S_k die Integration über dem Bereich bezeichnen, wo t_k grösser ist als alle anderen t:

$$
S_k = \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_k\,V(t'_k)\int_{t_0}^{t'_k}\mathrm{d}t'_n\cdots\int_{t_0}^{t'_k}\mathrm{d}t'_{k+1}\int_{t_0}^{t'_k}\mathrm{d}t'_{k-1}\cdots\int_{t_0}^{t'_k}\mathrm{d}t'_1\,T\left(V(t'_n)\cdots V(t'_{k+1})V(t'_{k-1})\cdots V(t'_1)\right)
$$

Durch Umbenennung von k und n für jedes S_k sieht man leicht, dass alle S_k gleich sind, somit

$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta}_n = &\quad \frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^n}\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_n\,V(t'_n)\int_{t_0}^{t'_n}\mathrm{d}t'_{n-1}\cdots\int_{t_0}^{t'_1}\mathrm{d}t'_1\,T\left(V(t'_{n-1})\cdots V(t'_1)\right) \\
\stackrel{\text{Annahme}}{=} &\quad \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'_n V(t'_n)\Delta_{n-1}(t'_n)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \bar{\Delta}_n(t) = \Delta_n(t)
$$

Übung 2. *[Zeitentwicklungsoperator]*

In der Vorlesung wurde der Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ definiert als

$$U(t,t_0) = e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t} e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_S(t-t_0)} e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_0}.$$

Zeige folgende Eigenschaften:

$$U(t_0,t_0) = \mathbb{1} \tag{2}$$
$$U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_0) = U(t_2,t_0) \tag{3}$$
$$U^{-1}(t_0,t_1) = U(t_1,t_0) \tag{4}$$
$$U^{\dagger}(t_1,t_0) = U^{-1}(t_1,t_0) \tag{5}$$

Lösung. Setze $t = t_0$ ein, dann folgt sofort $U(t_0, t_0) = 1$.

$$\begin{aligned} U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_0) &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_s(t_2-t_1)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_1}\cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_1}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_s(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_0} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_s(t_2-t_0)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_0} = U(t_2,t_0) \end{aligned}$$

$$U^{-1}(t_0,t_1) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_s(t_0-t_1)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_0} = U(t_1,t_0)$$

$$\begin{aligned} U^{-1}(t_1,t_0) &= U(t_0,t_1) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_0}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_s(t_0-t_1)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_1} \\ U^{\dagger}(t_1,t_0) &= \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_1}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_s(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0 t_0}\right)^{\dagger} = U^{-1}(t_1,t_0) \end{aligned}$$

Übung 3. *[Das optische Theorem]*

Durch Abseparieren des trivialen Teils der S-Matrix definieren wir die Transfermatrix T wie folgt:

$$S = \mathbb{1} + \mathrm{i}\,T\,. \tag{6}$$

Das Matrixelement der Transermatrix T_{fi} zwischen einem einlaufenden Zustand $|i\rangle$ und einem auslafenden Zustand $\langle f|$ ist über die Relation

$$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4\,\delta(E_f - E_i)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_i)\,T_{fi} \tag{7}$$

definiert, wobei ein Faktor $(2\pi)^4$ zusammen mit der globalen Energie-Impuls Erhaltung herausgezogen wurde. Verwenden Sie die Unitarität der S-Matrix ($SS^{\dagger} = \mathbb{1}$) und beweisen Sie das optische Theorem in zwei Schritten:

(a) *Zeigen Sie die folgende Relation*

$$T_{fi} - T^*_{if} = \mathrm{i}(2\pi)^4 \sum_n \int \mathrm{d}\Pi_n\,\delta(E_f - E_n)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_n)\,T_{fn}T^*_{in}\,, \tag{8}$$

wobei $\int \mathrm{d}\Pi_n$ über alle Impulskonfigurationen des Zwischenzustands $|n\rangle$ integriert. Die Vollständigkeitsrelation für die Zustände $|n\rangle$ lautet

$$\sum_n \int \mathrm{d}\Pi_n\;|n\rangle\langle n| = \mathbb{1}\,.$$

(b) *Beweisen Sie das optische Theorem:*

$$2\,\mathrm{Im}(T_{ii}) = (2\pi)^4 \sum_n \int \mathrm{d}\Pi_n\,\delta(E_i - E_n)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{p}_n)\,|T_{in}|^2\,. \tag{9}$$

Lösung.

(a) Aus der Unitarität der S-Matrix folgt

$$\mathbb{1} = SS^\dagger = (\mathbb{1} + \mathrm{i}T)(\mathbb{1} - \mathrm{i}T^\dagger)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{i}(T^\dagger - T) = TT^\dagger \,.$$

Nach Einschieben der letzten Gleichung zwischen $\langle f|$ und $|i\rangle$ und Einfügen der Vollständigkeitsrelation zwischen T und $T^\dagger$ auf der rechten Seite erhalten wir:

$$\mathrm{i}(2\pi)^4\,\delta(E_f - E_i)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_i)\,(T^*_{if} - T_{fi}) = \sum_n \int \mathrm{d}\Pi_n\ \langle f|T|n\rangle\,\langle n|T^\dagger|i\rangle$$

$$= (2\pi)^8 \sum_n \delta(E_f - E_n)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_n)\,\delta(E_n - E_i)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_n - \vec{p}_i) \int \mathrm{d}\Pi_n\, T_{fn}\, T^*_{in} \,.$$

Das Produkt der Dirac-Distributionen kann wie folgt umgeschrieben werden

$$\delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_n)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_n - \vec{p}_i) = \delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_n)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_i)\,,$$

und analog für die Energien. Der Term $\delta(E_f - E_i)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_i)$ kürzt sich somit zwischen den beiden Seiten.

$$T_{fi} - T^*_{if} = \mathrm{i}(2\pi)^4 \sum_n \int \mathrm{d}\Pi_n\, \delta(E_f - E_n)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_n)\, T_{fn}\, T^*_{in}$$

(b) Trivial, nachdem $i = f$ in der Gleichung aus Teil (a) gesetzt wird.