Übung 1. *Streuung zweier identischer Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen*

In der Vorlesung wurde die Streuung zweier identischer Spin-0 Teilchen behandelt. Wir wollen dies nun für zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen wiederholen. Separiere die Wellenfunktion in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten und in Spinkoordinaten. Nimm an, dass die Teilchen an einem spinunabhängigen Potential streuen.

(a) *Diskutiere die benötigte Symmetrie der relativen Wellenfunktion, wenn die Streuung in einem Singlett-Zustand ($s = 0$) auftritt. Benutze dies, um die benötigten Modifikationen für die Streuamplitude und damit einen Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu erhalten.*

(b) *Wiederhole Teil (a), wenn die Streuung in einem Triplett-Zustand ($s = 1$) stattfindet.*

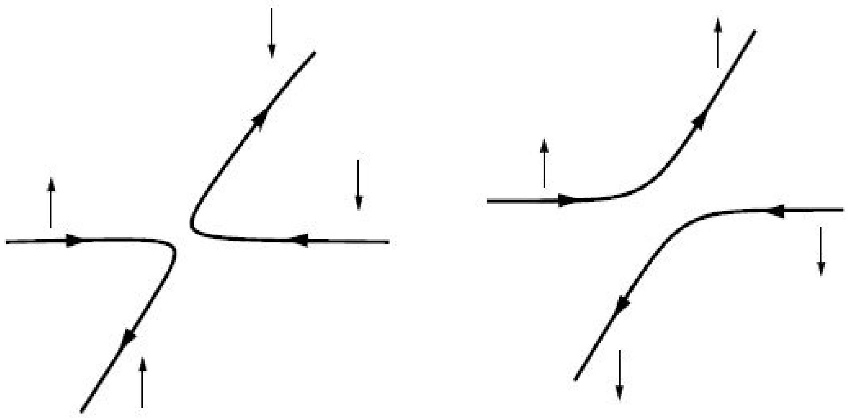

Abbildung 1: Zwei mögliche 'Trajektorien' durch ihren Spin unterscheidbarer Teilchen.

Lösung. Die komplette Wellenfunktion im Schwerpunktsystem ist gegeben durch:

$$\psi(\vec{R}, \vec{r}, S, m_s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{K}\cdot\vec{R}}\,\psi(\vec{r})\,\chi(S, m_s),$$

wobei $\chi(S, m_s)$ die Wellenfunktion für den Gesamtspin der beiden Teilchen ist.

(a) Wenn die Streuung in einem Singlett-Zustand ($s = 0$) stattfindet, dann ist $\chi(S, m_s)$ antisymmetrisch unter der Vertauschung der beiden Teilchen. In diesem Fall muss die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch unter Vertauschung der zwei Teilchen sein, und somit muss die räumliche Wellenfunktion symmetrisch sein, wie im Spin-0 Fall. Also erhalten wir für den Singlett-Fall, dass die Streuamplitude gegen ist durch:

$$f_{(S=0)}(\vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi) + f(\pi - \vartheta, \varphi + \pi),$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt durch:

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \left|f_{(S=0)}(\vartheta, \varphi)\right|^2 = \left|f(\vartheta, \varphi) + f(\pi - \vartheta, \varphi + \pi)\right|^2.$$

Hier haben wir Faktoren von 2 bzw. $1/\sqrt{2}$ vernachlässigt, da sie sich gegenseitig wegheben.

(b) Wenn der Gesamtspin $S = 1$ ist, ist die Spinwellenfunktion symmetrisch unter Vertauschung der Teilchen. Also muss die Streuamplitude antisymmetrisch sein. Das Ergebnis ist:

$$f_{(S=1)}(\vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi) - f(\pi - \vartheta, \varphi + \pi),$$

und für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \left|f_{(S=1)}(\vartheta, \varphi)\right|^2 = \left|f(\vartheta, \varphi) - f(\pi - \vartheta, \varphi + \pi)\right|^2.$$

Übung 2. *Heisenberg-Feldoperatoren*

(a) Betrachte ein System nicht-wechselwirkender Bosonen und schreibe den Hamiltonoperator in der Form $H = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar\omega\, a_k^\dagger a_k$. Finde einen expliziten Ausdruck für

$$\psi_H(\vec{x}, t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}\, \psi_S(\vec{x}, t)\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht},$$

wobei $\psi_S(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \vec{x}|k\rangle\, a_k$.

Hinweis. Zerlege die zweite Exponentialfunktion und kommutiere a_k durch Zeigen von

$$a_k \mathrm{e}^{\lambda a_k^\dagger a_k} = \mathrm{e}^{\lambda\left(a_k^\dagger a_k + 1\right)} a_k.$$

(b) Berechne $\psi_H(\vec{x}, t)$ für ein System nicht-wechselwirkender Fermionen.

Lösung.

(a) Der Hamilton-Operator des Feldes ist gegebn durch: $H = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar\omega\, a_k^\dagger a_k$. Der Feldoperator im Heisenberg-Bild ist verbunden mit dem Feldoperator im Schrödinger-Bild über:

$$\psi_H(\vec{x}, t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}\, \psi_S(\vec{x}, t) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht},$$

mit $\psi_S(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \vec{x}|k\rangle\, a_k$.

Um $e^{\frac{i}{\hbar}Ht} a_k e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ auszurechnen betrachten wir zuerst:

$$\begin{aligned} a_k \left(a_n^\dagger a_n\right)^s &= a_k a_n^\dagger a_n \left(a_n^\dagger a_n\right)^{s-1} = \left(\delta_{kn} + a_n^\dagger a_n\right) a_k \left(a_n^\dagger a_n\right)^{s-1} \\ &= \left(\delta_{kn} + a_n^\dagger a_n\right) a_k a_n^\dagger a_n \left(a_n^\dagger a_n\right)^{s-2} = \left(\delta_{kn} + a_n^\dagger a_n\right)^2 a_k \left(a_n^\dagger a_n\right)^{s-2} \end{aligned}$$

Also erhalten wir nach s Schritten:

$$a_k \left(a_n^\dagger a_n\right)^s = \left(\delta_{kn} + a_n^\dagger a_n\right)^s a_k.$$

Und damit:

$$a_k\, \mathrm{e}^{c a_n^\dagger a_n} = a_k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c^s}{s!} \left(a_n^\dagger a_n\right)^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c^s}{s!} \left(\delta_{kn} + a_n^\dagger a_n\right)^s a_k = \mathrm{e}^{c\left(\delta_{kn} + a_n^\dagger a_n\right)}\, a_k$$

Damit erhalten wir:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}\, a_k\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sum \omega_n a_n^\dagger a_n}\, a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sum \omega_n a_n^\dagger a_n} = e^{-\mathrm{i}\omega_k t} a_k$$

Also:

$$\psi_H(\vec{x},t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}\, \psi_S(\vec{x})\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \vec{x}|k\rangle\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}\, a_k$$

(b) Die Lösung für Fermionen beginnt wie oben. Es ist jedoch nun noch einfacher da a_k mit $a_n^\dagger a_n$ vertauscht wenn $k \neq n$, und für $k = n$ findet man

$$a_n a_n^\dagger a_n = -a_n^\dagger a_n a_n + a_n = a_n$$

Das bedeutet, dass

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}\, a_k\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar} = \exp\left(\mathrm{i}t \sum \omega_n a_n^\dagger a_n\right) a_k \exp\left(-\mathrm{i}t \sum \omega_n a_n^\dagger a_n\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t} a_k$$

Also bekommen wir wie oben:

$$\psi_H(\vec{x},t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}Ht}\, \psi_S\,(\vec{x})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \vec{x}|k\rangle\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t} a_k$$