Relativitätstheorie

Ergänzendes Scriptum zur Vorlesung Physik II

U. Straumann

Physik - Institut Universität Zürich, 19. März 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Die grundlegenden Ideen

1.1 Raum und Zeit

Raum und Zeit stellen in der Physik Grundbegriffe dar. Ihre Existenz wird für jede physikalische Theorie vorausgesetzt. Das bedeutet, dass der Raum und und die Zeit schon "vorher" da waren, sie existieren "a priori". Wir können daher Raum und Zeit nicht definieren, in dem Sinne, dass wir sie aus anderen Grössen durch eine Formel bestimmen könnten. Physikalisch gesehen, werden "a priori" Grössen durch eine Messvorschrift definiert (Zum Beispiel auch Masse).

Für jede physikalische Theorie müssen als erstes Raum und Zeit mathematisch passend beschrieben werden. Raum und Zeit werden dazu in einen mathematischen Raum abgebildet. In der Newton'schen Mechanik haben wir gelernt, dass der **Raum** durch einen dreidimensionalen reellen Vektorraum beschrieben wird, Orte im Raum werden durch Ortsvektoren dargestellt. Die Geometrie wird durch die euklidischen Axiome beschrieben. Der Abstand d zwischen zwei Punkten a und b im Raum ist darin gegeben durch

$$d(a,b) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2} = \sqrt{(a-b)\cdot(a-b)} \tag{1}$$

Der Punkt im letzten Ausdruck bedeutet das Skalarprodukt. Der Ausdruck in der Wurzel ist immer positiv, der Abstand also immer eine reelle, positive Zahl, er ist symmetrisch in den beiden Argumenten und ist nur dann null, wenn a=b. Es gilt die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Eine solche Abstandsfunktion heisst eine Metrik. Sie ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem und vom Bewegungszustand.

Setzt man b=0 bekommt man die Norm des Vektors a

$$||a|| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2}$$

und es gilt

$$d(a,b) = ||a - b|| \tag{3}$$

Zu jeder Norm kann man so eine Abstandsmetrik definieren.

Zentral für die Newton'sche Formulierung der Mechanik ist die Existenz einer Zeit, und zwar einer **absoluten Zeit**. Das bedeutet, dass die Zeit als reelle, eindimensionale Zahl dargestellt wird, die für alle Orte im Raum die gleiche Bedeutung hat. Die Zeit ist also eine vom Ort unabhängige Grösse. Mit Hilfe dieser Zeit können wir einen Bewegungs"ablauf" beschreiben, Geschwindigkeit und Beschleunigung definieren. Der Wert der Zeit und ihr Ablauf ist unabhängig vom Ort und vom Bewegungszustand eines Systems. Insbesondere ist der Abstand d zweier Punkte von der Zeit und vom Bewegungszustand unabhängig.

Insbesondere wären die Gesetze der Newton'schen Mechanik für eine rückwärtslaufende Zeit identisch. Man sagt, die Newton'sche Mechanik ist invariant unter Zeitumkehr. In unserem Bewusstsein gibt es aber natürlich sehr wohl einen Unterschied in der Richtung der Zeit, zwischen vorher und nachher. Das kommt daher, dass der Zeitbegriff an sich erst aus unserem Bewusstsein entsteht. Unsere Wahrnehmung und unser Denken hat eine Ordnung, in der sich "eins aus dem anderen ergibt", in der die Begriffe "vorher", "gleichzeitig" und "nachher" eine klare, absolute Bedeutung haben, die alle Menschen gleich beurteilen. Denken und Erkennen in zeitlich wohlgeordneten Abläufen ist für den Menschen fundamental. Diese Erfahrung führt zu dem Begriff der absoluten Zeit.

Die Darstellung des Raumes im Euklidischen Vektorraum und die absolute Zeit werden zusammen als **Galilei - Raum - Zeit** bezeichnet. Darin können wir verschiedene Koordinatensysteme definieren, die sich auch gegeneinander bewegen können. Ein solches Koordinatensystem heisst ein **Inertialsystem** (auch: Galileisystem), wenn ein kräftefreier Massenpunkt sich darin geradlinig und gleichförmig fortbewegt, wenn also das erste Newton'sche Prinzip gilt. Zwei beliebige Inertialsysteme bewegen sich gegeneinander stets mit einer konstanten Geschwindigkeit. Die Umrechnung der Koordinaten von einem Inertialsystem in ein anderes nennt man Galileitransformation. Die Newton'schen Gesetze gelten in allen Inertialsystemen gleich, man sagt die Newton'sche Mechanik ist invariant unter Galileitransformationen (**Galilei - Invarianz**, Gleichberechtigung aller Inertialsysteme).

Man spricht bei Invarianz unter einer kontinuierlichen Transformation auch von kontinuierlichen Symmetrien. Die Mathematikern Emmy Noether zeigte 1918, dass kontinuierliche Symmetrien direkt mit Erhaltungsgrössen zusammenhängen. Dies wird heute unter dem Namen **Noether-Theorem** in der theoretischen Mechanik gelehrt. Zum Beispiel folgt aus der Translationsinvarianz in Raum und Zeit die Impuls- und Energieerhaltung.

In der SRT muss die absoltue Bedeutung der Zeit aufgegeben werden und räumliche Abstände hängen vom Bewegungszustand ab. Die Galileiinvarianz wird durch die Lorentzinvarizen ersetzt. Energie und Impuls sind nicht mehr separat erhalten, sondern nur in einer miteinander (unter Einbezug der Masse) verknüpften Form.

1.2 A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper

Es zeigte sich nun aber, dass die Maxwell'schen Gleichungen nicht invariant sind unter Galileitransformationen. Zum Beispiel beschreiben die Maxwellgleichungen elektromagnetische Wellen, die sich mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, und zwar in allen Inertialsystemen mit dem gleichem c. Das widerspricht dem Additionsgesetz für Geschwindigkeiten in der Newton'schen Mechanik.

Albert Einstein hat in einem seiner drei im Jahre 1905 erschienen, revolutionären Arbeiten als Ausweg aus diesem Widerspruch die **spezielle Relativitätstheorie** (SRT) formuliert. Der Titel seiner Arbeit lautet: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Es geht darin also um die Dynamik von Massen, die sich unter dem Einfluss von elektromagnetischen Feldern bewegen. Für diese Theorie musste er nur vorraussetzen, dass die Naturgesetze der Mechanik und der Elektrodynamik in allen Inertialsystemen gleich lauten sollen.

Wie wir sehen werden, muss man dafür den Begriff der absoluten Zeit aufgeben. Das macht das Verständnis für den Anfänger nicht unbedingt leicht, man gewöhnt sich aber schnell an die neuen Begriffe. In der SRT hängt der Abstand zweier Raumpunkte vom Bewegungszustand des Systems ab. Die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse kann nicht absolut angegeben werden, "vorher" und "nachher" sind nicht mehr absolut definiert, sondern hängen vom Bezugssystem ab. Der Ablauf der Zeit ist verschieden schnell in verschiedenen Bezugssystemen.

Das bedeutet, dass wir Raum und Zeit nicht mehr voneinander unabhängig darstellen können, und deshalb nicht mehr von einer absoluten Zeit sprechen können. Stattdessen wird die Raum-Zeit als vierdimensionaler Vektorraum dargestellt, wobei eine der vier Dimensionen die Zeit ist. Ein Punkt in diesem vierdimensionalen Raum nennen wir ein **Ereignis**. Ein Ereignis hat - in einem bestimmten Koordinatensystem - eine feste Zeit und feste Ortskoordinaten, die Zeit und Ort beschreiben, wo und wann das Ereignis stattfindet. Ereignisse werden also dargestellt als Vektoren mit vier Komponenten (**4-er Vektoren**), z.B.:

$$u = (t_u, u_x, u_y, u_z)$$

Der Begriff des Inertialsystems bleibt uns aber erhalten. Wir werden sehen, dass wir in diesem vierdimensionalen Raum einen Abstand definieren können, der nun wieder vom Bezugssystem unabhängig ist und der in allen Inertialsystemen den gleichen Wert haben wird. Dieser 4-er Abstand s zwischen zwei Ereignissen u und v muss folgendermassen definiert werden:

$$s = \sqrt{c^2(t_u - t_v)^2 - (u_x - v_x)^2 - (u_y - v_y)^2 - (u_z - v_z)^2} \tag{4}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit). Die **vierdimensionale Raum-Zeit** zusammen mit dem so definierten Abstand heisst der **Minkowski-Raum**. Der Ausdruck in der Wurzel kann nun auch negativ werden, der 4-er Abstand ist nicht mehr positiv definit. Wir werden sehen, dass diese Tatsache eng mit der **Kausalität** zweier Ereignisse verknüpft ist.

Das wesentliche ist also nicht, dass es eine vierte Dimension (die Zeit) gibt, das ist ja bereits in der Newton'schen Mechanik der Fall. Das wesentliche ist, dass die Gesetze der Physik gleichzeitig Raum und Zeit einbeziehen, wie in diesem Beispiel der invarianten Minkowski-Metrik. Mit der SRT haben wir das Konstrukt "absolute Zeit" ein für allemal verloren. Dies stellt wohl das kulturgeschichtlich wichtigste Resultat der SRT dar.

Die SRT wurde in einem Wurf vollständig geboren. Sie hat sich in den hundert Jahren ihrer Existenz beliebig oft als richtig erwiesen. Die Teilchenbeschleuniger, die am Cern und anderer Forschungslabors, aber auch zu zehntausenden in den Spitälern dieser Welt stehen, würden gar nicht funktionieren ohne SRT.

1.3 Prinzip der Relativität

Einstein folgerte die SRT vollständig aus dem **Speziellen Relativitätsprinzip**:

a) die Naturgesetze der Mechanik und der Elektrodynamik lauten in allen Inertialsystemen gleich.

b) Die Lichgeschwindigkeit im Vakuum hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert.

Dafür musste er entweder die Newton'sche Mechanik oder die Elektrodynamik abändern. Er entschied sich dafür, die Maxwellgleichungen unverändert beizubehalten. Wir werden im Detail besprechen, was das für Konsequenzen für die Bewegungen und die Mechanik haben wird.

Einstein formulierte das Prinzip der Relativität als Vermutung, dass für alle Inertialsysteme die gleichen Gesetze der Mechanik und der Elektrodynamik gelten sollen. Als zweite Annahme verlangte er, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen diesen Systemen gleich sein soll. Explizit verlangte er also nicht, dass die Maxwellgleichungen richtig sein müssen. Er zeigt dann aber, dass die Maxwellgleichungen tatsächlich mit diesen Annahmen konsistent sind. Das heisst sie genügen schon von sich aus dem Prinzip der speziellen Relativität.

2 Lorentz - Transformationen

2.1 Erinnerung an die Galilei - Transformation

Seien Σ und Σ' zwei sich gegeneinander bewegende Inertialsysteme. Sei $\vec{u} = (u, 0, 0)$ die Geschwindigkeit, mit der sich Σ' von Σ aus gesehen bewege. Die Koordinatensysteme seien so gedreht, dass in beiden Systemen die Geschwindigkeit parallel zur x-Achse steht. Sei t die absolute Zeit (Galilei - Zeit). Zur Zeit $t = 0$ seien die beiden Koordinatensysteme identisch.

Die Gleichungen, die die Koordinaten eines Punktes im Raum im Koordinatensystem Σ' als Funktion von denjenigen in Σ ausdrückt, nennt man die Transformationsgleichungen. In der Newton'schen Mechanik lauten sie:

$$x' = x - u \cdot t \tag{5}$$
$$y' = y \tag{6}$$
$$z' = z \tag{7}$$
$$t' = t \tag{8}$$

Daraus folgert man das **Galilei'sche Additionsgesetz für Geschwindigkeiten**: Bewegt sich ein Körper im System Σ mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

(parallel zur x-Achse), so wird seine Geschwindigkeit in Σ' offensichtlich durch Einsetzen der Galileitransformation (5)

$$v' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u = v - u \tag{10}$$

Da die Inertialsysteme sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit u bewegen, sind die Beschleunigungen in beiden Systemen gleich

$$a' = \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \tag{11}$$

Die Newton'sche Bewegungsgleichung $F = m \cdot a$ lautet in allen Inertialsystemen gleich, man sagt sie ist invariant unter Galilei - Transformationen, oder einfach Galilei - invariant.

Beachte, dass umgekehrt aus der Forderung, dass die Newton'sche Bewegungsgleichung invariant sein soll, bereits folgt, dass die Transformation hčhstens ein in der Zeit lineares Glied haben darf.

2.2 Ausweg aus dem Widerspruch zur Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Dieses Additionsgesetz (10) steht klarerweise im Widerspruch zur geforderten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Sei Q eine Lichtquelle, die im System Σ ruhe. Das Licht pflanzt sich in Σ mit der Geschwindigkeit c fort. Nach dem Additionsgesetz wäre die Geschwindigkeit des Lichtes in Σ' - System $c' = c - u$.

Es gibt nun zwei offensichtliche Möglichkeiten, diesen Widerspruch aufzulösen:

1. Die Galilei - Transformationen und die Gesetze der Mechanik müssen für grosse Geschwindigkeiten, die vergleichbar mit c sind, abgeändert werden.
2. Es existiert ein ausgezeichnetes Inertialsystem (der "Aether"), in dem die Lichtgeschwindigkeit den Wert c hat. In allen anderen Inertialsystemen sind die Maxwellgleichungen so zu korrigieren, dass das Additionstheorem der Geschwindigkeiten erfüllt ist.

Einstein hat in seiner Arbeit den Weg 1. beschritten.

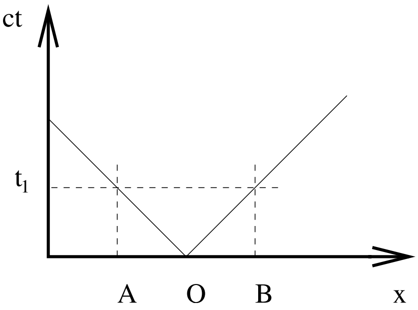
Die zweite Möglichkeit ist unschön, denn die Maxwellgleichungen bilden ein ungleich konsistenteres Theroriesystem als die Newton'sche Mechanik. Die Existenz eines Aethers ist aber auch experimentell widerlegt worden. Mit Hilfe des Interferometers von **Michelson and Morley** (1887) wurde gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Erdbewegung und senkrecht dazu gleich ist. Das Experiment und seine Resultate sind im Skriptum zur Physik II, Seiten 125 bis 127 beschrieben.

Es ist aber nicht richtig, dass diese experimentelle Beobachtung die Grundlage für Einsteins Arbeit war. Einstein selbst hat betont, dass er die Resultate von Michelson und Morley damals nicht gekannt hat. Es schien ihm offenbar einfach unelegant, einen absoluten Raum einführen zu müssen.

2.3 Konsequenzen für die Gleichzeitigkeit

Mit einem Gedankenexperiment wollen wir uns im folgenden klar machen, dass mit der Forderung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die Gleichzeitigkeit kein absoluter Begriff mehr sein kann.

Betrachten wir folgendes Ereignis: An der Stelle Q werde zur Zeit $t = 0$ ein Lichtblitz erzeugt. Er breitet sich in der Folge in alle Richtungen des Raumes aus.

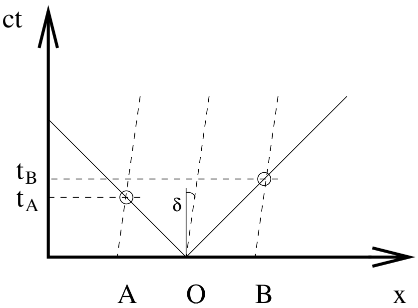


Im nebenstehenden Diagramm ist die Zeit multipliziert mit c gegenüber einer der drei Raumkoordinaten aufgetragen. Der Lichtblitz breitet sich gemäss $x = \pm ct$ aus, seine Orte liegen also auf Geraden mit Steigung $\pm 45°$. Diese beiden Geraden bezeichnet man als Lichtkegel.

Seien A und B zwei Beobachter, die sich im betrachteten Koordinatensystem in Ruhe befinden und zwar in gleicher Distanz von Q. Der Zusammenhang zwischen Ort und Zeit ihres Aufenthaltes stellt eine Linie im (x,ct) Diagramm dar. Solche Linien heissen **Weltlinien**. Da sich A und B in Ruhe befinden, sind ihre Weltlinien Gerade, die senkrecht auf der x - Achse stehen.

Punkte im (x,ct) Diagramm heissen **Ereignisse**. Beide Beobachter sehen zu einer bestimmten Zeit den Lichtblitz. Da beide Beobachter gleich weit von Q entfernt sind, sehen sie die Lichtblitze zur gleichen Zeit $t_A = t_B = t_1$. Die beiden Ereignisse "Sehen des Lichtblitzes" finden für A und B gleichzeitig statt.

Nun wollen wir unser Gedankenexperiment auf Reisen schicken. Q, A und B sollen sich alle mit gleicher Geschwindigkeit u gegenüber dem System Σ in die x - Richtung bewegen. Wir definieren mit Σ' das bewegte Koordinatensystem, in dem Q, A und B sich in Ruhe befinden. Wegen dem Relativitätsprinzip müssen wie vorher die Beobachter in Σ' die Lichtblitze zur Zeit $t'_A = t'_B$ gleichzeitig sehen.

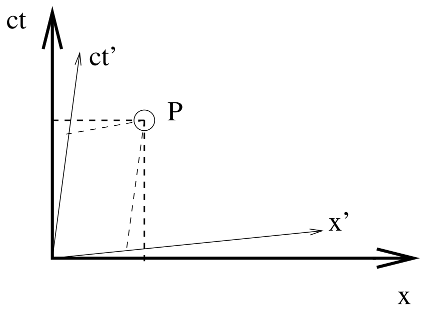


Im nebenstehenden Diagramm sind nun die Weltlinien von Q, A und B in Σ eingezeichnet. Sie sind um den Winkel δ geneigt, da sich Q, A und B mit der Geschwindigkeit $u < c$ bewegen ($\tan\delta = u/c$). Wegen der Forderung nach der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit laufen aber die Geraden des Lichtkegels immer noch unter $\pm 45°$. Man erkennt, dass in diesem Koordinatensystem die beiden Beobachter A und B den Lichtblitz nicht mehr gleichzeitig sehen!

A sieht den Lichtblitz früher als B: $t_A < t_B$. Offenbar sind die Begriffe "gleichzeitig", "vorher" und "nachher" nun vom Koordinatensystem abhängig. Die Zeitkoordinaten t und t' sind verschieden. Das ist gemeint, wenn man sagt, dass es keine absolute Zeit mehr gibt.

Was geht hier vor? Wäre die Galileitransformation und ihr Additionsgesetz der Geschwindigkeiten (10) hier zuständig, dann wäre die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im ruhenden System $c \pm u$. Die beiden Geraden des Lichtkegels im obigen Diagramm hätten also eine leicht unterschiedliche Neigung, gerade so, dass die beiden Beobachter das Ereignis gleichzeitig sehen würden.

Wir wollen nun noch versuchen, das Koordinatensystem Σ' in der Darstellung einzuzeichnen. Wir nehmen an, dass die beiden Koordinatensysteme zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen: $x'(t = 0) = x(t = 0)$.



Die t' - Achse stellt nichts anderes dar, als die Weltlinie des Ursprungs des Koordinatensystems Σ. Sie hat also die gleiche Neigung wie die Weltlinien von Q, A und B im obigen Bild. Die x' - Achse verbindet Punkte gleicher Zeit in Σ', insbesondere $t' = 0$. Sie muss also parallel zu einer Geraden sein, die im obigen Diagramm durch die in Σ' gleichzeitig stattfindenden Ereignisse $t'_A = t'_B$ läuft.

In diesem Diagramm hat ein Ereingis P die mit gestrichelten Lininen eingezeichneten Koordinaten. Die Winkel δ zwischen t und t' - Achse, bzw. x und x' - Achse, sind gleich und es gilt $\tan \delta = u/c$, wie man aus dem bisher gesagten leicht sieht.

Offensichtlich bildet die Weltlinie eines im Ursprung ausgesandten Lichtblitzes in beiden Koordinatensystemen die Winkelhalbierende zwischen der ct - und der x - Achse, wie wir das wegen c =konst erwarten.

2.4 Herleitung der Lorentz - Transformationen

Wir suchen die Gleichungen, die die Raum-Zeit-Koordinaten von einem Inertialsystem Σ in ein anderes Σ' umrechnen. Σ' bewege sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = (u, 0, 0)$ Die Gleichungen sollen offensichtlich folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Lichtgeschwindigkeit muss in beiden Systemen gleich gross sein.
2. Für kleine Geschwindigkeiten $u \ll c$ sollen die Transformationsgleichungen in die Galileitransformation (5) übergehen.
3. Die Gleichungen müssen linear sein. Gäbe es zum Beispiel quadratische Terme, dann würden Ableitungen nach Ort und Zeit von Ort oder Zeit selbst abhängen. Physikalischen Gesetze, die Ableitungen enthalten, wären dann vom Nullpunkt des Orts- und Zeitmasstabes abhängig. Das darf aber wegen der Homogenität des Raumes nicht sein.

Ein Lichtblitz (oder die Wellenfront einer beliebigen elektromagnetischen Welle) breitet sich kugelförmig aus, und zwar im Vakuum mit der Geschwindigkeit c in beiden Koordinatensystemen. Wegen der ersten Bedingung gilt also für den Kugelradius im Quadrat:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2 \qquad \text{und} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \cdot t'^2 \tag{12}$$

Wegen der zweiten und dritten Bedingung machen wir den einfachst möglichen Ansatz mit vorerst beliebigen Konstanten A, B und D:

$$x' = A(x - u \cdot t) \tag{13}$$
$$y' = y \tag{14}$$
$$z' = z \tag{15}$$
$$t' = Bx + Dt \tag{16}$$

Setzen wir dies in Gleichung (12) ein, erhalten wir eine Gleichung, die Terme in x^2, in $x \cdot t$ und in t^2 enthält. Da die Transformationsgleichungen aber für alle x und t gleich lauten sollen, müssen die Vorfaktoren dieser drei Terme die Gleichung separat erfüllen. Wir erhalten damit drei Gleichungen für die drei Unbekannten A, B und D. Deren Auflösung ergibt:

$$A = \gamma \qquad B = -\frac{\beta}{c}\gamma \qquad D = \gamma \tag{17}$$

Die verwendeten Abkürzungen sind wie folgt definiert:

$$\beta := \frac{u}{c} \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{18}$$

Die Transformationsgleichungen für Raum und Zeit lauten somit:

$$x' = \gamma(x - u \cdot t) \tag{19}$$
$$y' = y \tag{20}$$
$$z' = z \tag{21}$$
$$t' = \gamma(-\frac{\beta}{c} \cdot x + t) \tag{22}$$

Im Grenzfall $u \ll c$ geht $\beta \to 0$, $\gamma \to 1$ und wir erhalten dafür wie gewünscht die Galileitransfomationen (5). Im Grenzfall $u \to c$ geht $\beta \to 1$ und $\gamma \to \infty$. Ausserdem sieht man, dass $\beta \leq 1$ sein muss, sonst würde γ imaginär und wir hätten keine sinnvollen Transformationen mehr. Offenbar kann es keine grössere Geschwindigkeit als die Lichtgeschwindigkeit c geben!

Genauer gesagt, kann es kein Inertialsystem geben, dass eine Geschwindigkeit hat, die grösser als c ist. Das bedeutet, dass jede Information höchstens mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden kann. (Aber: Zum Beispiel der Lichfleck eines rotierenden Scheinwerferkegels kann sich schon mit $v > c$ bewegen, dabei wird keine Information übertragen.)

Eine unmittelbare Konsequenz davon ist, dass das Modell eines idealen starren Körper mit der Relativitätstheorie im Widerspruck steht. Es gibt keine starren Körper.

Es ist heute üblich, die Zeitkoordinaten mit c zu multiplizieren. Man erhält dann in Ort und Zeit symmetrische Transformationsgleichungen, die **Lorentztransformation**:

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma(-\beta \cdot x + ct) && (23)\\
x' &= \gamma(x - \beta \cdot ct) && (24)\\
y' &= y && (25)\\
z' &= z && (26)
\end{aligned}
$$

2.5 Längenkontraktion

Was bedeuten die Lorentztransformationen praktisch? Wir betrachten vorerst einen Stab aus festem Material, z.B. Stahl. Er bewege sich mit der Geschwindigkeit β im System Σ. Das System Σ' sei sein Ruhesystem, das heisst das Inertialsystem, in dem der Stab ruht. In diesem Ruhesystem habe der Stab die Länge L'. Weiter sei der Stab in beiden Systemen parallel zur x - Achse angeordnet.

Wir versuchen nun, die Länge des Stabes im System Σ zu messen. Dafür müssen wir seine Endkoordinaten x_1 und x_2 ablesen, und zwar "gleichzeitig". Das bedeutet, das die Zeitkoordinate im System Σ zum Zeitpunkt der beiden Ablesungen für beide den gleichen Wert t_1 haben soll.

Was bedeutet das praktisch? Wie kann man die Koordinaten der beiden Enden eines schnell vorbeifliegenden Stabes gleichzeitig ablesen? Man könnte zum Beispiel in der Mitte des Stabes eine Marke anbringen. Weiter braucht man drei Physiker, die in einer Reihe im gleichen Abstand stehen. Wenn der mittlere Physiker die Marke vorbeiziehen sieht, löst er einen Lichtblitz aus. Wenn die beiden anderen Physiker diesen Lichtblitz empfangen, lesen sie die Koordinate ihres jeweiligen Ende des Stabes ab.

Es sei $L' = x_2' - x_1'$ und $L = x_2 - x_1$. Die Transformationsgleichungen lauten:

$$x_1' = \gamma(x_1 - \beta c t_1) \qquad \text{und} \qquad x_2' = \gamma(x_2 - \beta c t_1) \tag{27}$$

Daraus folgt sofort

$$L = \frac{1}{\gamma} L' \tag{28}$$

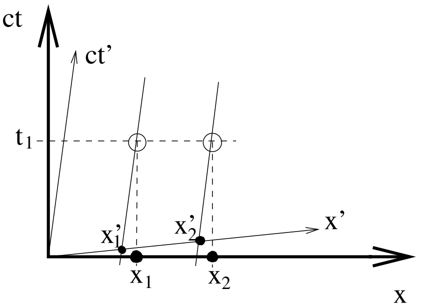
Der bewegte Stab wird scheinbar um den Faktor γ kürzer. Er wird umso kürzer, je grösser seine Geschwindigkeit ist! Der Stab ist in seinem Ruhesystem stets am längsten.

Diese Einsicht steht nicht im Widerspruch zur mikroskopischen Vorstellung eines Festkörpers. Es bedeutet einfach, dass auch die Abstände der Atome im Kristallgitter sich ändern.

Für eine animierte Illustration eines schnellen Fluges zum Beispiel durch den Eiffelturm und das Brandenburgertor siehe:

http://pen.physik.uni-kl.de/information/downloads/tempolimit/ind1.html

Wir haben als wichtige Vorraussetzung verwendet, dass eine Längenmessung die *gleichzeitige* Ablesung von Koordinaten erfordert. Wie wir weiter oben gesehen haben, bedeutet das aber, dass in einem anderen Koordinatensystem diese gleiche Ablesung dann nicht gleichzeitig erfolgt. Man vergegenwärtige sich die Verhältnisse in der folgenden Figur.



Die ausgezogenen Linien stellen die Weltlinien der beiden Enden des Stabes dar. Die beiden Kreise stellen die Ereignisse des gleichzeitigen Ablesens der Koordinaten im System Σ dar. Im System Σ' sind sie nicht gleichzeitig. Wollte man L' messen, so könnte man zum Beispiel x_1' und x_2' zur Zeit $t' = 0$ ablesen. Diese beiden Ablesungen sind dann aber im System Σ nicht gleichzeitig!

Man sieht, dass $L' = x_2' - x_1'$ grösser ist als das $L = x_2 - x_1$.

2.6 Zeitdilatation und das Zwillingsparadoxon

Analoge Verhältnisse erhält man, wenn man eine bewegte Uhr betrachtet. Die Uhr bestehe aus einem Sender, der in seinem Ruhesystem alle Sekunden einen Lichtblitz aussendet. Im System Σ, indem die Uhr an der Stelle x_1 ruhen soll, emfangen wir die beiden Lichtblitze im Einsekundentakt, z.B. zu den Zeiten t_1 und t_2. Im Sytem Σ', dass sich mit Geschwindigkeit u bewegt, messen wir Lichtblitze zu den Zeiten

$$t_1' = \gamma(t_1 - \frac{\beta}{c}x_1) \qquad t_2' = \gamma(t_2 - \frac{\beta}{c}x_1) \tag{29}$$

Damit wird das Zeitintervall zwischen zwei Lichtblitzen

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \tag{30}$$

Von einem relativ zur Uhr bewegten Inertialsystem aus betrachtet, scheint die Uhr langsamer zu laufen. Die Uhr läuft in ihrem Ruhesystem stets am schnellsten. Man nennt die Zeit im Ruhesystem eines Gegenstandes auch dessen Eigenzeit τ, englisch *proper time*.

(Uebungsaufgabe: Lebensdauer der Höhenstrahlungsmüonen).

Einen besonderen Fall bekommt man, wenn man $\beta \to 1$ betrachtet. Bewegt sich ein System mit Lichtgeschwindigkeit, bleibt darin die Zeit stehen! Auf dem Lichtkegel gibt es keine Zeit mehr!

Diese Zeitdilatation gibt Anlass zum sogenannten Zwillingsparadoxon. Von einem Zwillingspaar gehe die Schwester mit einem Raumschiff auf Reisen, der Bruder bleibt in Zürich. Die Schwester fliegt mit ihrem Raumschiff mit hoher Geschwindigkeit bis zum Stern A, und misst dafür mit ihrer mitgenommenen Uhr die Zeit $T/2$. Dann kehrt sie um, und fliegt mit der gleichen Geschwindigkeit zurück nach Zürich, wofür sie wieder $T/2$ braucht. Der in Zürich gebliebene Bruder vermisst seine Schwester während der Zeit T'. Der Bruder erlebt für die Hin- und Rückreise je die Zeit $T'/2 = \gamma T/2$. Bei der Rückkehr ist für den Bruder also die Zeit $T' = \gamma T$ vergangen, er ist also mehr gealtert, als seine reisende Schwester!

Diese Geschichte ist ein scheinbares Paradoxon, weil man meinen könnte, dass man die Argumentation ja umdrehen könnte, der Bruder behält die relevante Uhr bei sich. Die Asymmetrie kommt aber daher, dass die Schwester beim Umkehren ja das System wechseln und dafür auf ihrer Reise grössere Beschleunigungen in Kauf nehmen musste. Wenn man den Verlauf der Zeit in beschleunigten Systemen richtig berücksichtigt, bekommt man das erwähnte Resultat, das die reisende Schwester jünger bleibt. Das Paradoxon ist also nur ein scheinbares.

Denken wir uns vorerst eine beliebige Weltlinie, die zwischen zwei Ereignissen A und B verläuft, die kausal verknüpfbar sind (siehe weiter unten). Sei $\mathrm{d}t$ ein kleines Zeitintervall im Koordinatensystem Σ, das sich auf dieser Weltlinie mit - im allgemeinen nicht konstanter - Geschwindigkeit bewegt.

Im weiteren stellen wir fest, dass es genau ein Inertialsystem Σ' gibt, bei dem die beiden Ereignisse A und B am gleichen Ort stattfinden. Die Weltlinie auf der dieses spezielle Inertialsystem sich bewegt ist die einzige unbeschleunigte Weltlinie, die A und B verbindet. Sei t'_{AB} bzw. t_{AB} die Zeitdifferenz zwischen A und B im System Σ' bzw. Σ. Sei $\beta(t)$ die momentane Geschwindigkeit von Σ in Σ'. Dann gilt wie oben

$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}t' \tag{31}$$

Integrieren über den ganzen Weg der Weltlinie von Σ ergibt

$$t'_{\mathrm{AB}} = \int_A^B \sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t \tag{32}$$

Dieses Integral wird offensichtlich maximal für $\beta = \text{konst} = 0$. Das ist der Fall in dem $\Sigma \to \Sigma'$ und somit $t' \to \tau$.

Die richtige Aussage lautet also wie folgt: “Seien A und B zwei Ereignisse, die kausal miteinander verknüpfbar seien. Von allen möglichen Weltlinien, die die beiden verbinden, gibt es eine ausgezeichnete, nämlich diejenige, die keine Beschleunigung erfährt. Die Eigenzeit dieser Weltlinie zeigt die grösste Zeitdifferenz zwischen A und B an.”

Für den Zwillingsbruder, für den die Abreise (A) und die Heimkehr (B) am gleichen Ort stattfindet, vergeht also am meisten Zeit. Im Gegensatz dazu erhält herumreisen jung....

Um das noch etwas zu veranschaulichen, betrachten wir einen radioaktiven Zerfall, z.B. Müonen. Diese zerfallen in ihrem Ruhesystem mit einer Lebensdauer von etwa 2.2μs. Lassen wir nun die Muonen nicht an Ort, sondern beschleunigen sie - zum Beispiel auf Kreisbahnen -, dann läuft für diese Muonen die Zeit langsamer ab. Ihre Lebensdauer vom unbeschleunigten System aus gesehen wird vergrössert. Dieser Effekt spielt in der Elementarteilchenphysik eine grosse Rolle.

Die Effekte der Zeitdilatation spielen natürlich nur bei grossen Geschwindigkeiten oder bei sehr genauen Messungen eine Rolle. Sie sind aber jedenfalls so gross, dass sie in den Satellitennavigationssystemen wie GPS berücksichtigt werden müssen.

2.7 Experiment: Ein Jetflug um die Erde

In einem Experiment[1] wird eine Cäsium-Uhr im Flugzeug 2× ostwärts und 2× westwärts um die Erde geflogen. Der Vergleich mit einer Referenzuhr auf der Erde sollte nach der Relativitätstheorie 40±23 ns Zeitverlust auf der Ost-Reise und 275±21 ns Zeitgewinn auf der West-Reise erwarten. Die gemessenen Zeiten waren -59±10 ns und +273±7 ns in sehr guter Uebereinstimmung mit der speziellen Relativitätstheorie und damit des Zwillingsparadoxons.

In neuerer Zeit ist durch weitere Experimente die Zeitdilatation sehr viel genauer bestätigt worden.

3 4er Vektoren und Minkowskiraum

3.1 Definitionen

Wir haben bereits die 4er Vektoren der Raum-Zeit erwähnt. Allgemeiner bezeichnet man einen **4er Vektor** mit hochgestellten Indizes in griechischen Buchstaben:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{33}$$

Ein 4er Vektor ist also zunächst ein Element des vierdimensionalen reellen Vektorraumes. Man bezeichnet auch

$$\begin{array}{rcll} x^0 & & & \text{Zeitkomponente, Nullkomponente} \\ (x^1, x^2, x^3) & = & \vec{x} & \text{Raumkomponente} \end{array} \tag{34}$$

Im euklidischen Raum war der Abstand zweier Punkte durch das Skalarprodukt der beiden Ortsvektoren gegeben (euklidische Metrik). Analog dazu müssen wir nun den Abstand zweier Ereignisse im vierdimensionalen Raum mit einer Metrik messen können.

Man definiert vorerst das **4er - Produkt** (eine metrische Form)

$$(a^\mu, b^\mu) := a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \tag{35}$$

Es ersetzt das Skalarprodukt zweier Vektoren im Euklidischen Raum.

[1]Hafel and Keating, Science 177(1972)166-170, M.V.Berry, Kapitel 5.2, 1993

Beachte, dass hier die hochgestellten Zahlen nicht Potenzen, sondern Indizes sind. Vergleichen wir mit dem dreidimensionalen Skalarprodukt, können wir offensichtlich schreiben

$$(a^\mu, b^\mu) := a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{36}$$

wobei die Vektorpfeile die gewöhnlichen dreidimensionalen Vektoren und der Punkt das normale dreidimensionale Skalarprodukt bedeutet.

Damit können wir nun analog zu (1) den 4-dimensionalen Abstand definieren

$$s^2(u, v) = (u^\mu - v^\mu, u^\mu - v^\mu) \tag{37}$$

Analog zur Norm (2) im eudklidischen Raum bilden wir das 4er - Produkt mit v=0:

$$s^2(u, 0) = (u^\mu, u^\mu) = (u^0)^2 - \vec{u}^2 \tag{38}$$

Beachte, dass das im mathematischen Sinne keine Norm ist, denn der Ausdruck kann null oder negativ werden. Man nennt $s^2(u)$ auch die 4-dimensionale Invariante oder die Lorentzinvariante von u.

Der Witz der Sache besteht in der Tat darin, dass das 4er Produkt (35) und s^2 nicht vom Koordinatensystem abhängen und invariant unter Lorentztransformationen sind. Also genau so wie das Skalarprodukt und der Abstand im euklidischen Raum invariant unter Galileitransformationen sind.

Zum Beispiel für den 4er-Ortsvektor in der Raum - Zeit

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \tag{39}$$

wird

$$s^2(x) = c^2 t^2 - (\vec{x})^2 \tag{40}$$

für $s^2 = 0$ also die Gleichung eines Lichtkegels. Und die ist nach Konstruktion invariant unter Lorentztransformationen. Wir hatten aber die Lorentztransformationen so hergeleitet, dass s^2 selbst invariant bleibt, auch wenn es nicht gerade null ist. Und wir haben bei der Herleitung keine speziellen Eigenschaften von Ort und Zeit verwendet, ausser dass $s^2(x)$ unter der Transformation sich nicht ändern soll.

(Für weitere Interpretation von $s^2(x)$ siehe Kapitel 4 über Kausalität).

In der Praxis vereinfacht man die etwas umständliche Schreibweise des 4er - Produktes und schreibt einfach $u \cdot v$ oder $u\,v$ statt (u^μ, v^μ). Falls u und v 4er - Vektoren sind, versteht man unter $u\,v$ immer das 4er - Produkt. Entsprechend versteht man unter $(u - v)^2$ den in (37) definierten 4-dimensionalen Abstand $s^2(u, v)$. Und u^2 bedeutet die 4-dimensionale Invariante $s^2(u)$.

Für das 4er - Produkt (35) gelten die gleichen Rechenregeln, wie für das gewöhnliche Skalarprodukt, es ist zum Beispiel für 4er - Vektoren u, v und a und einen Skalar α

$$uv = vu \qquad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \qquad a(u + v) = au + av \tag{41}$$

Der besseren Uebersicht halber, schreiben wir in diesem Scriptum aber meistens die ausführlichere Form (u^μ, v^μ).

[Den Abstand (37) nennt man manchmal Minkowskimetrik, was aber nicht genau richtig ist, da er die Definition einer Metrik nicht erfüllt (kann negativ werden, ist null für zwei verschiedene Ereignisse auf dem gleichen Lichtkegel)].

Damit haben wir folgende **Definitionen**:

> Das Paar bestehend aus dem vierdimensionalen Vektorraum der Raum-Zeit und der metrischen Form (35) heisst der Minkowskiraum. Die Form (35) heisst 4er - Produkt und ist invariant unter Lorentztransformationen. Ein Element des Minkowskiraumes heisst ein 4er - Vektor.

Das heisst, **ein 4er - Vektor u ist erst ein solcher, wenn $s^2(u)$ lorentzinvariant ist**. Dann wissen wir aber, dass er mit Lorentztransformationen von einem Inertialsystem in ein anderes umzurechnen ist.

Wenn wir nun in den folgenden Kapiteln versuchen, alle physikalischen Gesetze der spez. Relativitätstheorie anzupassen, dann werden wir in Praxis nach 4er Vektoren suchen. Dann kennen wir sofort deren Transformationseigenschaften. Und deren 4er Produkt s^2 ist invariant unter Lorentztransformationen. Beispiele von 4er Vektoren sind:

$$\begin{array}{lcll}
\text{Zeit-Ortsvektor} & x^\mu & = & (ct, \vec{x}) \\
\text{Geschwindigkeit} & u^\mu & = & (\gamma c, \gamma \vec{v}) \\
\text{Energie-Impuls} & p^\mu & = & (E/c, \vec{p}) \\
\text{Kraft} & f^\mu & = & (\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}/c, \gamma \vec{F}) \\
\text{elektrischer Strom} & j^\mu & = & (c\rho, \vec{j}) \\
\text{el.magn. Potential} & A^\mu & = & (V/c, \vec{A})
\end{array}$$

Die spezielle Relativitätstheorie verlangt, dass alle Gesetze der Natur in allen Inertialsystemen gleich lauten müssen. Die mathematischen Gleichungen müssen unter Lorentztransformationen in ihrer Form unverändert bleiben, man sagt sie müssen **kovariant** sein. z.B. ist eine Gleichung kovariant, wenn die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite je einen 4er - Vektor bilden.

Ausdrücke, deren zahlenmässiger Wert bei Lorentztransformationen sich nicht ändert, heissen **invariant**. z.B. sind alle 4er - Produkte lorentzinvariant (Ruhemasse, Eigenzeit), aber auch zum Beispiel die elektrische Ladung.

Statt der Galileiraumzeit haben wir jetzt also die Minkowski-Raum-Zeit. Aus der Galilei-Invarianz wird die Lorentz-Invarianz. **Die Invarianz der Naturgesetze unter der Lorentztransformationen stellt den eigentlichen Kern der SRT dar.** Daraus folgt zum Beispiel, dass Masse und Energie nur gemeinsam invariant sind.

Die Lorentz-Invarianz impliziert übrigens umgekehrt auch die Maxwellgleichungen, wenn man zusätzlich den Erhalt der elektrischen Ladung fordert sowie die elektrostatischen Gesetze für ruhende Systeme vorraussetzt.

3.2 Matrixdarstellung der Lorentztransformation

Die Lorentztransformationen schreibt man meist in Matrixnotation:

$$(x^\mu)' = \Lambda \cdot x^\mu \tag{42}$$

Dabei sind die x^μ jetzt die Spaltenvektoren und Λ eine 4 mal 4 Matrix. Ausgeschrieben bedeutet das zum Beispiel für die Transformationsgleichungen (23):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{43}$$

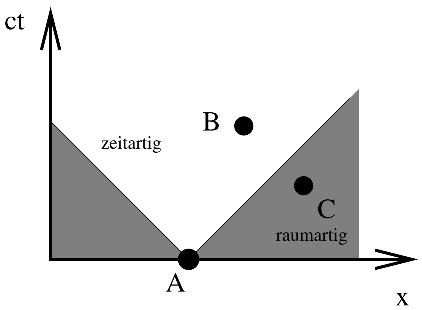
Dabei ist der Punkt nun als Matrixmultiplikation zu verstehen, so wie man das in der linearen Algebra lernt.

Die spezielle Transformation (43), die parallelen Koordinatensystemen und einer Relativgeschwindigkeit parallel zur x-Achse entspricht, nennt man einen **Lorentzboost**. Im allgemeinen können die Λ's auch Drehungen beinhalten.

Alle 4er-Vektoren transformieren sich exakt gleich nach obiger Formel (42).

4 Kausalität

Wir haben festgestellt, dass keine Information mit $v > c$ übertragen werden kann. Das bedeutet, dass es Ereignisse A und C so geben kann, dass sie nicht kausal verknüpft werden können. Zwei Ereignisse sind nur dann kausal verknüpft, wenn sie durch eine Weltlinie verknüpft werden können, die innerhalb des Lichtkegels liegt. Auf dieser Weltlinie finden die beiden Ereignisse am gleichen Ort, zeitlich hintereinander statt. Sie können sich also kausal beeinflussen, man nennt sie **zeitartig**, sie liegen "hier".



Die beiden Ereignisse A und B in der Figur sind zeitartig. Die beiden Ereignisse A und C hingegen sind nicht zeitartig, da ein Signal, das von A auf C einen Einfluss hätte, sich mit mehr als der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten müsste. Es gibt kein Inertialsystem, in dem A und C am gleichen Ort stattfinden. Man nennt A und C **raumartig**. C findet "anderswo" statt als A.

Das formale Kriterium, ob zwei Ereignisse kausal verknüpfbar sind, ist offensichtlich die relative Lage zum Lichtkegel $c^2 t^2 = (\vec{x})^2$. Das heisst man muss einfach den 4 dimensionalen Abstand

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\vec{\Delta x})^2 \tag{44}$$

zwischen den beiden Ereignissen mit räumlichen Abstand Δx und zeitlichem Abstand Δt ausrechnen. Dann gilt

$$\begin{aligned} s^2 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{zeitartig, kausal verknüpfbar} \\ s^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{lichtartig, auf Lichtkegel} \\ s^2 < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{raumartig, nicht kausal verknüpfbar} \end{aligned} \tag{45}$$

Beachte, dass man ein beliebiges Inertialsystem wählen kann, um die Abstände x und t zu bestimmen, denn s^2 ist ja lorentzinvariant. **Damit sind auch diese Kriterien lorentzinvariant**.

Bei zeitartigen Ereignissen ist offensichtlich immer klar, welches Ereignis zuerst stattfand: Die gerade Weltlinie von A nach B stellt die Zeitachse das Inertialsystem dar, in dem A und B am gleichen Ort stattfinden. Darin ist eindeutig bestimmt, welches der beiden Ereignisse vorher ist. Im Beispiel der obigen Zeichnung ist B später A, man sagt B liegt im "Vorwärtskegel" von A, oder A liegt im "Rückwärtskegel von B. Der Abstand $\sqrt{s^2}$ zweier zeitartiger Ereignisse ist also gerade die Zeitdifferenz, gemessen in der Eigenzeit $\tau = \sqrt{s^2}$.

Für zwei raumartige Ereignisse gibt es dafür immer ein Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse A und C zur gleichen Zeit, aber nicht am gleichen Ort stattfinden. Die Gerade, die A und C miteinander verbindet, stellt die Ortsachse dieses Inertialsystems dar. $\sqrt{-s^2}$ stellt in diesem System den geometrischen Abstand zwischen A und C dar.

Gäbe es unendlich schnelle Signale könnten natürlich A und C einander beeinflussen. Solche Signal müsste es dann aber auch im System in der Zeichnung geben, die darin horzontale Geraden darstellen. Durch geeignete Reflexionen könnte man so die eigene Vergangenheit beeinflussen!

Aus der Existenz einer maximalen Signalausbreitungsgeschwindigkeit folgt auch, dass es keine absolut starren Körper geben kann.

5 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Sei v_0 die Geschwindigkeit des Inertialsystems Σ', gemessen im System Σ. Sei v die Geschwindigkeit eines Objektes in Σ. Nach Galilei wäre die Geschwindigkeit v'_{Galilei} in Σ'

$$v'_{\text{Galilei}} = v - v_0 \tag{46}$$

Wie lautet dieses Gesetz nun für grosse Geschwindigkeiten u? Für eine direkte Rechnung müsste man die lorentransformierten Grössen $x' = x'(x, t)$ sowie $t' = t'(x, t)$ in die Definition der Geschwindigkeit $v' = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$ einsetzen.

Wir wollen eine elegantere Methode wählen: Wir suchen nach einem 4er Vektor, der die Geschwindigkeit darstellt. Als 4er - Vektor transformiert sich dieser dann per Defintion unter Lorentztransformationen.

Sei $x^\mu = (ct, \vec{x})$ ein 4er - Ortsvektor eines Objektes in Σ. Wir bilden die Ableitung nach der Eigenzeit τ dieses Objektes und definieren:

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{47}$$

Die Zeitkomponente davon ist offenbar

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = c \cdot \gamma \tag{48}$$

und die Ortskomponente

$$\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \cdot \vec{v} \tag{49}$$

Dabei bezieht sich γ auf die Geschwindigkeit unseres Objektes im System Σ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{50}$$

Wir wollen zeigen, dass u^μ ein 4er - Vektor ist. Dazu müssen wir nur beweisen, dass das 4er - Produkt mit sich selber lorentzinvariant ist. Es wird

$$(u^\mu, u^\mu) = (u^0)^2 - (\vec{u})^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma(\vec{v})^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 \tag{51}$$

offensichtlich eine Konstante. Also ist die **4er - Geschwindigkeit** u^μ in der Tat ein 4er - Vektor, wir können sie mit der allgemeinen Gleichung (42) transformieren. Es wird zum Beispiel für eine Relativgeschwindigkeit v_0 in x - Richtung, durch Ausschreiben der Matriznotation (43):

$$\gamma' v'_x = (u^1)' = -\beta_0\gamma_0 u^0 + \gamma_0 u^1 = -\beta_0\gamma_0\gamma c + \gamma_0\gamma v_x \tag{52}$$

wobei sich jetzt γ' und γ_0 auf v'_x und v_0 bezieht. Aufgelöst nach v'_x ergibt sich nach einigem Rechnen für das **Additionstheorem der Geschwindigkeiten in der SRT**:

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_x v_0}{c^2}} \tag{53}$$

was für hinreichend kleine Geschwindigkeiten in der Tat in die Galileitransformation übergeht, wie gefordert. Man erkennt auch, dass es nicht möglich ist, zwei Geschwindigkeiten zu einer Geschwindigkeit grösser als c zu addieren. Besonders wird für $v_x = c$ auch $v'_x = c$ (!).

6 Dynamik

6.1 Impuls und Energie

Wir gehen nach unserem Rezept vor, und versuchen vorerst 4er - Vektoren zu finden, die Energie und Impuls enthalten. Dann wissen wir, wie sich diese transformieren.

Der naheliegensten 4er - Vektor für den Impuls erhält man durch Multiplikation der 4er - Geschwindigkeit mit der Masse in Analogie zur klassischen Mechanik, die ja den Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten sein soll. Wir definieren:

$$p^\mu = m\, u^\mu \tag{54}$$

Was bedeutet m? Um eine wohldefinierte Grösse zu bekommen, wählen wir für m die Masse des Objektes, wie sie in seinem Ruhesystem gemessen wird, die sogenannte Ruhemasse. Da u^μ ein 4er Vektor ist, muss auch p^μ ein 4er - Vektor sein, denn die Lorenztransformationen sind linear:

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) \tag{55}$$

Der Raumteil wird im Grenzfall von kleinen Geschwindigkeiten ($\gamma \to 1$) in der Tat zum Newton'schen Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$.

Die Nullkomponente $p^0 = \gamma mc$ wollen wir noch etwas genauer untersuchen. Wir betrachten deren Wert für kleine Geschwindigkeiten. Bei $\vec{v} = 0$ ist $p^0 = mc$. Für kleine Geschwindigkeiten entwickeln wir nach v^2/c^2:

$$p^0 = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc\ (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots) = mc + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c} + \ldots \tag{56}$$

Multiplizieren mit c ergibt:

$$p^0 c = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \ldots \tag{57}$$

Dabei handelt es sich offensichtlich um eine Energie, der zweite Term der Entwicklung ist gerade die kinetische Energie, wie sie in der Newton'schen Mechanik definiert wurde. Man nennt

$$\begin{array}{rcll} E & = & p^0 c = \gamma mc^2 & \text{Gesamtenergie} \\ E_0 & = & mc^2 & \text{Ruheenergie} \\ T & = & E - E_0 = mc^2(\gamma - 1) & \text{kinetische Energie} \end{array} \tag{58}$$

Die kinetische Energie $T = p^0 c - mc^2 = \frac{m}{2}v^2 + \ldots$ nimmt für kleine Geschwindigkeiten in der Tat deren Wert in der Newton'schen Mechanik an.

Diese Ueberlegungen stimmen für ein kräftefreies Teilchen mit Ruhemasse m. Setzen wir das Teilchen äusseren Kräften (z.B. elektromagnetischen Feldern) aus, kommen potentielle Energieen hinzu (Wechselwirkung).

p^μ ist nach Konstruktion ein 4er Vektor. Dessen 4er Produkt muss also Lorentzinvariant sein:

$$(p^\mu, p^\mu) = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = m^2\, \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2 \tag{59}$$

Bis auf den Faktor c also gerade die Ruhemasse im Quadrat. Man spricht deshalb auch von der invarianten Masse.

Kombinieren wir diese Resultate, erhalten wir die **Energie - Impulsäquivalenz**:

$$\boxed{E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} \tag{60}$$

“Die quadratische Summe von Impuls und Ruhemasse ist gleich der totalen Energie im Quadrat”.

Wir haben bereits gesehen, dass wir für kleine Geschwindigkeiten die kinetische Energie richtig herausbekommen. Was passiert bei sehr grossen Geschwindigkeiten? Die Gesamtenergie $E = \gamma mc^2$ geht offensichtlich für $v \to c$, also $\gamma \to \infty$, gegen unendlich. Es braucht unendlich viel Energie, um einen Körper der Masse m auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen! Das macht natürlich Sinn, da dadurch verhindert wird, dass eine Geschwindigkeit grösser als c erreicht werden kann.

Wegen $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ nennt man den Ausdruck γm auch effektive Masse und sagt, “bei hoher Geschwindigkeit nimmt die (effektive) Masse zu”. Bei hohen Geschwindigkeiten nimmt also die Trägheit eines Körpers zu! In der Physik bezeichnet m normalerweise die Ruhemasse. In der in der populärwissenschaftlichen Literatur verwendeten Beziehung $E = Mc^2$ ist also eigentlich die effektive, träge Masse $M = \gamma m$ gemeint, es sei denn der Körper befinde sich in Ruhe.

Im Gegensatz dazu folgt für Teilchen mit verschwindender Ruhemasse $m \to 0$, dass $\gamma \to \infty$ für beliebige Energieen. Teilchen ohne Ruhemasse bewegen sich gezwungenermassen immer mit Lichtgeschwindigkeit, und es gilt:

$$E = |\vec{p}|c \tag{61}$$

Für Teilchen ohne Ruhemasse sind Energie und Impuls gleich, bis auf eine Konstante.

Umgekehrt formuliert: Nur Teilchen mit Ruhemasse null können sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Das ist zum Beispiel der Fall für Photonen, die Quanten der elektromagnetischen Strahlung. Diese Teilchen können nicht zerfallen, da auf dem Lichtkegel die Zeit still steht, sie werden niemals alt. Möchte man, wie in einem science fiction Roman, eine Reise mit Lichtgeschwindigkeit antreten, muss man also vorher seine Masse abgeben...

Einstein hat die Aequivalenz zwischen Masse und Energie urspünglich in einer separaten Arbeit aus Ueberlegungen im Zusammenhang mit Energie und Impuls der elektromagnetischen Strahlung hergeleitet. Er hat sie selber als die wichtigste Konsequenz aus der Relativitätstheorie bezeichnet.

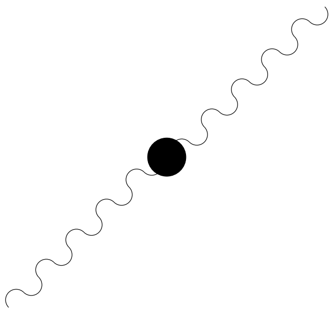
6.2 Beispiel: Der π^0 - Zerfall

Dass die Interpretation von mc^2 als Ruheenergie sinnvoll ist, sieht man zum Beispiel anhand des Zerfalles von neutralen π - Mesonen (Pionen). Ein Pion ist der leichteste Teilchenzustand, der aus einem Quark und einem Antiquark besteht. Zur Erinnerung: Nukleonen bestehen aus drei Quarks, zum Beispiel p=(up, up, down).

Wir betrachten das π^0 vorerst in seinem Ruhesystem. Seine Masse beträgt

$$m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2 \tag{62}$$

Diese Angabe einer Masse in Energieeinheiten ist wegen der Energieäquivalenzbeziehung (60) sinnvoll! Ebenso gibt man Impulse in Einheiten von MeV/c an. Man lässt in den Angaben oft das $1/c^2$ weg. Die Masse eines Protons beträgt etwa 1 GeV, die eines Elektrons 511 keV.



In seinem Ruhesystem zerfällt das π^0 nach sehr kurzer Zeit in zwei Photonen γ_1 und γ_2. Damit der Schwerpunktsatz erfüllt ist, und der Gesamtimpuls erhalten bleibt, müssen die beiden Photonen den gleichen Impuls und damit auch die gleiche Energie haben:

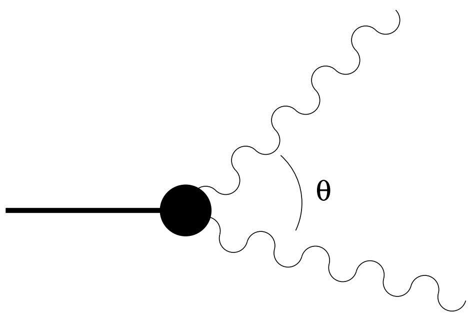
$$|\vec{p}_{\gamma_1}|c = |\vec{p}_{\gamma_2}|c = E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} \tag{63}$$

Weiter muss die Gesamtenergie erhalten bleiben:

$$E_{\pi^0} = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} \tag{64}$$

Damit wird

$$E_{\gamma_1} = \frac{m_{\pi^0} c^2}{2} = 67.5 \text{ MeV} \tag{65}$$



Bewegt sich das Pion vor dem Zerfall, dann sind die Impulse der beiden Photonen nicht mehr unbedingt gleich, ihre Vektorsumme muss den Impuls des Pions vor dem Zerfall $\vec{p}_{\pi^0}$ ergeben:

$$\vec{p}_{\pi^0} = \vec{p}_{\gamma_1} + \vec{p}_{\gamma_2} \tag{66}$$

Damit sind auch die Energieen der beiden Photonen verschieden. Sie bewegen sich aber nachwievor mit Lichtgeschwindigkeit!

Der Energieerhaltungssatz lautet nun:

$$|\vec{p}_{\pi^0}|^2 c^2 + m_{\pi^0}^2 c^4 = (E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2})^2 \tag{67}$$

Nennen wir nun p_{γ_1} und p_{γ_2} die 4er - Vektoren der beiden Photonen und p_{π^0} den 4er - Vektor des π^0 vor dem Zerfall. Dann lautet die **kovariante Schreibweise der Energie- Impulserhaltung**:

$$p_{\pi^0} = p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2} \tag{68}$$

Diese Gleichung ist in jedem Bezugssystem richtig, die 4-er Vektoren haben aber andere Werte.

Die Energieerhaltung bedeutet aber auch, dass die lorentzinvariante Masse $(p^\mu, p^\mu) = m^2$ bei der Reaktion erhalten bleiben muss. Die Gleichung

$$p_{\pi^0}^2 = (p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2})^2 \tag{69}$$

hat also in jedem Bezugssystem den gleichen Wert, sie ist lorentzinvariant. Setzen wir die π^0 - Masse m und die Photonenergieen ein, erhalten wir:

$$m^2 = (E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2})^2 - (\vec{p}_{\gamma_1} + \vec{p}_{\gamma_2})^2 \tag{70}$$

Verwenden wir weiter, dass für die masselosen Photonen $E = |\vec{p}|$ gilt, erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$m^2 = 4\, E_{\gamma_1}\, E_{\gamma_2}\, \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{71}$$

wobei θ der Winkel zwischen den beiden Photonen bedeutet. Man kann also durch eine Messung der Energieen der beiden Photonen und des Winkels zwischen ihnen, die Masse des ursprünglichen Teilchens rekonstruieren. Es ist beachtenswert, dass dies ohne vorherige Kenntnis der Bewegungsrichtung und Energie des ursprünglichen Teilchens möglich ist!

[Uebungsaufgaben: Leite (71) aus (69) her. Bestimme aus den gemessenen Photonimpulsen Energie und Impuls des einfallenden Pions]

Wir führen dieses Experiment gelegentlich als Praktikum zum Vorlesungsmodul Teilchenphysik am Paul-Scherrer-Institut durch.

[Uebungsaufgabe "Paarerzeugung": Zeige, dass ein Photon der Energie $E_\gamma = 2\text{MeV}$, das im freien Raum in ein Positron und ein Elektron mit gleicher Masse $m = 511\text{keV}/c^2$ zerfällt, den Energie - Impulserhaltungssatz verletzen würde. Bringe nun einen elektrisch geladenen Atomkern der Masse $M = 50\text{GeV}/c^2$ in die Nähe. Wieviel Impuls und Energie muss der Atomkern aufnehmen, damit die Reaktion ablaufen kann?]

6.3 Beispiel: Bindungsenergieen von Kernen

Beim radioaktiven Zerfall und bei Spaltung von schweren Atomkernen wird Energie frei. Es handelt sich um die potentielle Energie der Bindungskräfte, in diesem Fall hauptsächlich der starken Wechselwirkung. Wegen der Aeuquivalenz von Masse und Energie muss im gebundenen Zustand die träge Masse γm um die Bindungsenergie kleiner sein, also die Summe der Massen der Bestandteile.

Zum Beispiel wiegt das Deutern 1875.6280 MeV. Das sind 2.225 MeV weniger, als die Summe der Bestandteile Proton (938.280 MeV) und Neutron (939.573 MeV). Die Bindungsenergie des Deuterons beträgt also 2.225 MeV. Diese Energie wird frei, wenn man Proton und Neutron fusioniert. Da die starke Wechselwirkung besonders stark ist, ist auch die Bindungsenergie vergleichsweise gross (etwa 1 Promille der Massen) und die Massenabnahme ist einem experimentellem Nachweis leicht zugänglich.

Bei schwereren Atomkernen liegen die mittleren Bindungsenergieen stabiler Kerne etwa zwischen 7 MeV und 9 MeV pro Nukleon, wobei das Maximum etwa bei A=60 liegt. Zu grösserer und kleinerer Massenzahl A hin nimmt die mittlere Bindungsenergie ab. Deshalb gewinnt man Energie, wenn man schwere Atome spaltet (Fissionsreaktor), oder leichte Atome zusammenschmilzt (Fusionsreaktor).

6.4 Kräfte und Bewegungsgleichung

Das Ziel der folgenden Ueberlegungen ist eine mit der speziellen Relativitätstheorie kompatible Formulierung der Newton'sche Bewegungsgleichung zu finden, mit dem Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{72}$$

Nach unserem bewährtem Muster suchen wir vorerst nach geeigneten 4er - Vektoren. Wir haben bereits p^μ definiert, es liegt deshalb Nahe, eine "relativistische Kraft" f^μ so zu definieren, dass

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{73}$$

wobei wir die Ableitung nach der Eigenzeit verwendet haben. Damit ist f^μ nach Konstruktion ein 4-er Vektor, er transformiert sich nach der Lorenztransformation (42). Wie steht dieser Ausdruck mit der normalen Kraft in Beziehung?

Für die Ortskomponente gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\,\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \gamma\,\vec{F} \tag{74}$$

und für die Nullkomponente

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \gamma\,\vec{F}\cdot\vec{v} \tag{75}$$

wobei wir annehmen, dass dem System nur in Form der von der Kraft geleisteten Arbeit Energie zugeführt wird. Damit wird

$$f^\mu = (\frac{\gamma}{c}\,\vec{F}\cdot\vec{v},\ \gamma\vec{F}) \tag{76}$$

und die Bewegungsgleichung in kovarianter Form:

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m\,\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{77}$$

Insbesondere lautet die relativistisch korrekte Formulierung der Wirkung der Lorentzkraft:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \qquad \text{mit} \qquad \vec{p} = \gamma\cdot m\cdot\vec{v} \tag{78}$$

6.5 Experiment: Träge Masse und Impuls eines relativistischen Elektrons

Eine Untersuchung der Zunahme der Masse bei hohen Impulsen wurde am Physik-Institut 1963 durchgeführt[2]. Dabei wird die Ablenkung eines schnellen, geladenen Teilchens zuerst in einem magnetischen und dann in einem elektrischen Feld gemessen. Da die magnetische Kraft die Geschwindigkeit enthält, jedoch die elektrische nicht, können Geschwindigkeit und Impulsänderung ("Kraft") auf diese Weise unabhängig voneinander gemessen werden.

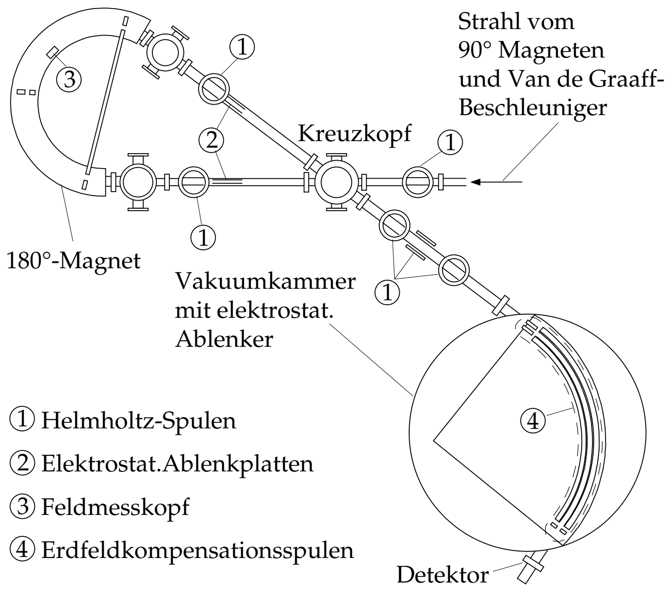
Die Zentripetalbeschleunigung eines mit e geladenen Teilchens auf einer Kreisbahn mit Radius R ist v^2/R. Nach der Relativitätstheorie muss für die Bewegungsgleichung die träge Masse γm eingesetzt werden. Im transversalen Magnetfeld B ergibt sich aus einer Kreisbahn mit Radius R_M für den Impuls $p = \gamma m v$ (Herleitung für $c = 1$):

$$\gamma m \frac{v^2}{R_M} = evB \qquad \Rightarrow \qquad p = eBR_M \tag{79}$$

In einem radial nach aussen gerichteten elektrischen Feld E ergibt sich entsprechend:

$$\gamma m \frac{v^2}{R_E} = eE \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p^2}{\gamma m} = eER_E \tag{80}$$

Aus den Messungen von BR_B und ER_E kann man also die Massenzunahme γ und den Impuls des Teilchens unabhänging voneinander bestimmen.



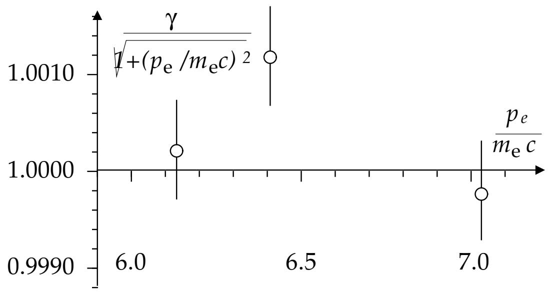
Das schwierige an einem sochen Versuch ist, die Radien und das elektrische Feld genau zu messen. Deshalb wurde stattdessen die Anordnung mit einem langsamen Protonstrahl mit einer kinetischen Energie von 1.7 MeV ($\gamma = 1$) geeicht. Das Magnetfeld wurde mit der Proton-Kernresonanzmethode gemessen.

[2] V.Meyer, W.Reichart, H.H.Staub et al. Helv.Phys.Acta 36(1963)981

Man könnte γ als Funktion von p darstellen und zeigt so die relativistische Massenzunahme. Da die Messfehler sehr klein waren, trugen die Autoren das Verhältnis Y von γ zu dessem von der Relativitätstheorie erwarteten Wert

$$Y = \frac{\gamma mc^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + (\frac{p}{mc})^2}} \tag{81}$$

als Funktion von p/mc auf.



Graphische Darstellung der Messresultate für
$\beta_e = 0.9870,\ 0.9881,\ 0.9900.$

Der Mittelwert ist

$$\bar{Y} = 1.00037 \pm 0.00036$$

und stimmt also auf etwa $4 \cdot 10^{-4}$ mit dem erwarteten Wert 1 überein.

7 Kovarianz der Elektrodynamik

Die elektrodynamischen Grundgleichungen haben offensichtliche Schwierigkeiten mit Relativbewegungen. Die Lorentzkraft

$$\vec{F_L} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{82}$$

verändert sich markant bereits bei einer kleinen Relativgeschwindigkeit. Wählen wir ein Relativsystem so, dass die Ladung ruht (das Ruhesystem der Ladung), scheint die Lorentzkraft zu verschwinden. Das kann natürlich nicht sein.

Man muss die Elektrodynamik als ein gemeinsames System betrachten, sodass die elektrischen und magnetischen Felder bei Transformation ineinander über gehen können. Wir werden sehen, dass der vollständige Ausdruck für die Lorentzkraft

$$\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{83}$$

in der Tat kovariant ist, seine Form also auch nach Transformationen nicht ändert. Vielmehr wird durch die Transformation in das Ruhesystem der Ladung ein zusätzliches elektrisches Feld erzeugt, sodass weiterhin eine Kraft wirkt.

Lorentz und Poincaree haben lange vor Einstein gezeigt, dass man die Schwierigkeiten mit den Relativbewegungen in der Elektrodynamik umgehen kann, wenn man Lorentztransformationen einführt. In der Tat werden wir sehen, dass die Elektrodynamik kovariant unter Lorentztransformationen formuliert werden kann.

Vorerst wollen wir zur Illustration ein Beispiel betrachten.

7.1 Ein Beispiel von Feynman

[aus Feynamn Lectures, Band II, Seite 13-6.]

In einem ungeladenen Draht fliesse ein Strom I mit einer Stromdichte $\vec{j} = \rho_- \ \vec{v}_0$. Ausserhalb des Drahtes bewege sich eine einzelne Ladung $-q$ mit der gleichen Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ parallel zu diesem Draht.

Im Ruhesystem Σ des Drahtes gibt es ein magnetisches Feld, das auf die einzelne Ladung ausserhalb des Drahtes eine Lorentzkraft ausübt, und zwar eine anziehende Kraft der Grösse (mit $I = |\vec{j}|A = |\rho_-|v_0 A$):

$$F_L = q\ v_0\ B = q\ v_0\ \mu_0\ \frac{I}{2\pi r} = q\ v_0^2\ \mu_0\ \frac{|\rho_-|A}{2\pi r} \tag{84}$$

Im Ruhesystem Σ' unserer Ladung gibt es keine Lorentzkraft mehr. Da der Draht ungeladen ist, kann es scheinbar auch keine elektrische Kraft geben. - Wo liegt der Fehler? Man beachte, dass dieses Problem vorerst nichts mit grossen Geschwindigkeiten zu tun hat, die typischen v_0 der Ladungsträger sind in der Grössenordnung von mm/sec.

Wir müssen die Definition der Ladungsdichte genauer ansehen: In Σ ist der Draht ungeladen, die Ladungsdichte der Kerne ρ_+ und Elektronen ρ_- sind gleich:

$$\rho_+ = \frac{n_+\ q_+}{V} \qquad \rho_- = \frac{n_-\ q_-}{V} \qquad \rho_+ = -\rho_- \tag{85}$$

wo n und q Zahl und Ladung der Kerne bzw. Elektronen bezeichnen. Bei der Transformation in das bewegte System Σ' müssen wir beachten, dass sich das Volumen V für die beiden Teilchensorten verschieden transformiert! Sei V im System Σ ein Volumen mit Querschnitt A und Länge entlang des Drahtes L, also $V = A\ L$. Für die Transformation gilt sicher $A = A'$ (quer zur Bewegungsrichtung). Aber L ändert sich. Die Kerne bewegen sich nun, L_+ wird also kleiner, während die Elektronen sich nun in Ruhe befinden, L_- wird also grösser:

$$L'_+ = \frac{L_+}{\gamma} \qquad L'_- = \gamma\ L_- \tag{86}$$

Damit sind die beiden Volumina nun verschieden, und demnach auch die Ladungsdichten:

$$\rho'_+ = \gamma\rho_+ \qquad \rho'_- = \frac{\rho_-}{\gamma} \tag{87}$$

Der Draht erscheint in Σ' plötzlich geladen, und zwar positiv:

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = (\gamma - \frac{1}{\gamma})\rho_+ = \gamma\beta^2\rho_+ \tag{88}$$

wobei die Definition $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ verwendet wurde.

Damit übt der nun geladene Draht eine anziehende elektrische Coulombkraft auf unsere in Σ' ruhende elektrische Ladung aus, die von der Ladung pro Längeneinheit $\lambda' = nq/L' = \rho' A'$ abhängt:

$$F'_C = \frac{q\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{89}$$

(siehe Skriptum Physik A II, Seite 6/7). Wir setzen die Ladungsdichte (88) ein, und erhalten:

$$F'_C = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} A\rho_+\beta^2\gamma \tag{90}$$

Da $\beta = v_0/c$ und $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$ wird in der Tat

$$F'_C = \gamma\, F_L \tag{91}$$

Durch die Transformation hat sich also die Wirkung des magnetischen Feldes in eine solche des elektrischen Feldes verwandelt. Der Faktor γ ist nur für grosse Geschwindigkeiten relevant. Er entspricht der Transformationsvorschrift für Kräfte (siehe Kapitel 6.4). Aber die Transformation der magnetischen in eine elektrische Kraft tritt auch bei sehr kleinen Geschwindigkeiten v_0 auf, unabhängig von deren Grösse.

7.2 Lorentzkraft, Ladung und Strom

Von hier an verwenden wir sogenannte natürliche Einheiten, dass heisst wir setzen die $c = 1$. Das bedeutet, dass wir Geschwindigkeiten statt in m/s nun in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit angeben, es wird $v = \beta$. Eine bestimmte Distanz messen wir nun in Einheiten der Zeit, das heisst wir geben statt Metern die Zeit an, die das Licht braucht, um diese Distanz zurückzulegen.

Die Lorentzkraft bewirkt eine Impulsänderung wie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{92}$$

Um die Lorentztrasnformationen zu diskutieren, ersetzen wir die Geschwindigkeit durch die 4er - Geschwindigkeit und verwenden die Ableitung nach der Eigenzeit der bewegten Ladung. Dies entspricht einer Multiplikation der Gleichung mit γ:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} = q\,(u^0\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}) \tag{93}$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Raumteil eines 4er-vektors dar. Die Nullkomponente dazu ist die Aenderung der Energie des Teilchens im elektrischen Feld:

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = q\,(\vec{u} \cdot \vec{E}) \tag{94}$$

Wenn wir erreichen wollen, dass die Lorentzkraft kovariant ist, dann müssen auch die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen einen 4er - Vektor bilden, und sich mit Lorentztransformationen transformieren.

Nun gibt es auf der rechten Seite drei Faktoren: Ladung, Geschwindigkeit und Felder. Wenn wir das Transformationsverhalten zweier davon kennen, können wir das für den dritten Faktor so bestimmen, dass die Gleichung kovariant werden. u^μ ist bereits ein 4er - Vektor. Aus verschiedenen Experimenten wissen wir, dass die Ladung unabhängig vom Bezugssystem ist, und zwar mit hoher Genauigkeit. Daraus kann im Prinzip die Transformationsgleichungen für die Felder finden (siehe Kapitel 7.4). Wir wollen aber vorerst die 4er - Vektoren für Strom und Potential kennenlernen.

Wir bilden nun (nur für diese Definition schreiben wir das c) die **4er - Stromdichte**

$$j^\mu = (\rho c, \vec{j}) \tag{95}$$

und zeigen, dass dies ein 4er Vektor ist. Sei ρ_0 die Ladungsdichte einer ruhenden Ladungsverteilung in deren Ruhesystem. Dann wird die Ladungsdichte in einem mit $\vec{v}$ bewegten System nach (87):

$$\rho = \gamma\,\rho_0 \tag{96}$$

Im bewegten System entsteht ausserdem eine Stromdichte

$$\vec{j} = \rho\,\vec{v} = \gamma\,\rho_0\,\vec{v} \tag{97}$$

Vergleichen wir dies mit der Definition der 4er - Geschwindigkeit $u^\mu = (\gamma c, \gamma\vec{v})$ so sieht man:

$$j^\mu = \rho_0\,u^\mu \tag{98}$$

Weil ρ_0 nach Definition eine konstante Zahl ist, muss auch j^μ ein 4er - Vektor sein.

Die **Kontinuitätsgleichung** für den elektrischen Strom lautet

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{99}$$

(siehe Skriptum Physik A II, Seite 32) und drückt nichts anderes aus, als dass Strom bewegte Ladung sei und die Gesamtladung erhalten sein müsse. Wir wollen nun versuchen, eine kovariante Formulierung der Kontinuitätsgleichung zu finden.

Wir benötigen dazu die Definition der **kovarianten Ableitung** oder des **vierdimensionalen Gradienten**:

$$\nabla^\mu := \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\right) \tag{100}$$

Das ist also ein Operator, der aus einer partiellen Zeitableitung und dem negativen Gradienten besteht, man findet dafür auch die Bezeichnung ∂^μ oder $\partial/\partial x_\mu$. Er ist lorentzinvariant, das heisst er liefert den gleichen Wert in verschiedenen Bezugssystemen, die sich um eine Lorentztransformation unterscheiden (für eine Herleitung siehe z.B. Feynman II, Seite 25-6).

Das 4er - Produkt zwischen der kovarianten Ableitung und einem 4er Vektor v^μ

$$(\nabla^\mu, v^\mu) = \frac{\partial v^0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} \tag{101}$$

ist in der Tat auch eine Lorentzinvariante, wie man durch Anwendung der Kettenregel zeigen kann. Man nennt diese Operation auch die **4er - Divergenz**. Beachte, dass das + Zeichen aus zwei - Zeichen entsteht, eines aus der Definition der kovarianten Ableitung und eines aus der Definition des 4er - Produkts.

Die kovariante Ableitung unseres 4er - Stromes j^μ wird also

$$(\nabla^\mu, j^\mu) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{102}$$

Der Ausdruck wird 0, wegen der Kontinuitätsgleichung (99), er ist also offensichtlich lorentzinvariant. Dies ist die **kovariante Form der Kontinuitätsgleichung** und damit der Erhaltung der Ladung.

7.3 Vektorpotentiale und Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen in differentieller Form lauten ("lokal")

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \tfrac{\rho}{\epsilon_0} & \qquad \nabla \times \vec{E} &= -\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \qquad \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{103}$$

Das elektrische Feld hat eine statische Komponente, die rotationsfrei ist, und demnach durch einen Gradienten dargestellt werden kann. Die erste Gleichung entspricht dem Coulombgesetz. Die zweite Gleichung stellt das Faraday'sche Induktionsgesetz dar, und zeigt, dass das elektrische Feld bei zeitabhängigen Magnetfeldern eine Rotationskomponente bekommt. Die dritte Gleichung besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt. Die vierte Gleichung kombiniert das Ampere'sche Gesetz und den Maxwell'schen Verschiebungsstrom. Das Magnetfeld ist immer ein reines Rotationsfeld.

Da die Divergenz einer Rotation immer verschwindet $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$ (siehe mathematische Hilfsmittel zur Physik A), kann man ein divergenzfreies Feld immer als Rotation schreiben. Wir definieren deshalb das Vektorpotential $\vec{A}$ so, dass

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{104}$$

$\vec{A}$ ist nur bis auf eine additiven Term bestimmt, der als Gradient dargestellt werden kann. Denn man kann jederzeit statt $\vec{A}$ $\vec{A}'$ verwenden, mit

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \tag{105}$$

wo ψ ein beliebiges skalares Feld ist. Denn die Rotation eines Gradienten ist immer null. Dies bedeutet auch, dass man die Divergenz $\nabla \cdot \vec{A}'$ des Vektorpotentiales beliebig festlegen kann durch geeignete Wahl von ψ, denn es ist

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2\psi \tag{106}$$

Für die kovariante Schreibweise der Maxwellgleichungen werden wir eine bestimmte Wahl von $\nabla \cdot \vec{A}'$ treffen.

Sei V das Potential, das den rotationsfreien Anteil von $\vec{E}$ erzeugt, die erste Maxwell - Gleichung lautet dann:

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{107}$$

Das Potential V ist nur bis auf eine additive, skalare Grösse eindeutig bestimmt, deren Gradient verschwinden muss.

Was passiert mit der zweiten Maxwellgleichung, dem Faraday'schen Gesetz? Wir setzen $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ in das Faradaygesetz ein, und erhalten

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \tag{108}$$

da die partiellen Ableitungen nach dem Ort und der Zeit voneinander unabhängig sind, und deshalb vertauscht werden dürfen. Wir haben also ein Feld, dessen Rotation verschwindet. Ein solches Feld können wir als Gradienten einer skalaren Funktion darstellen, wir schreiben:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \tag{109}$$

Für zeitliche konstante Felder bekommen wir damit wieder den elektrostatischen Fall, wie gewünscht. In der Potentialform lautet also das Faraday - Gesetz

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{110}$$

und das Coulombgesetz (107) wird zu

$$\nabla \cdot (\nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{oder} \qquad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{111}$$

Nun können wir natürlich $\vec{A}$ nicht mehr einfach beliebig verändern, wie in Gleichung (105), da sich sonst das elektrische Feld evt. ändern würde. Man muss immer gleichzeitig auch das Potential V ändern:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \qquad \text{und} \qquad V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{112}$$

dann bleiben die physikalischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unverändert. Diese Transformation heisst eine **Eichtransformation** (englisch gauge transformation), solche Transformationen spielen in der modernen theoretischen Physik eine zentrale Rolle. Wenn ψ ortsabhängig ist, heisst die Eichtransformation "lokal".

Wir nehmen nun die vierte Maxwellgleichung (Ampere'sche Gesetz und Maxwell'scher Verschiebungsstrom) und setzen darin unsere Potentiale ein. Wir verwenden dabei die Identität aus der Vektoranalysis

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \vec{A}) - \Delta \vec{A} \tag{113}$$

(siehe mathematische Hilsmittel zu Physik I und II). Wir setzen auch noch für das elektrische Feld $\vec{E}$ die Potentialform (110) des Faradaygesetzes ein. Die vierte Maxwellgleichung wird dann zu:

$$\nabla(\nabla \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \tag{114}$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, machen wir jetzt von der Möglichkeit der Wahl einer Eichung (106) Gebrauch. Dazu müssen wir auch (112) beachten. Wir wählen die sogenannte **Lorentzeichung**:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \tag{115}$$

[Uebungsaufgabe: Bestimme für diese Eichung die Bedingungen an ψ, damit (112) erfüllt ist]

Setzen wir diese Eichung in die Gleichungen (114) und (111) ein, erhalten wir die Maxwellgleichungen in Potentialform

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \tag{116}$$

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{117}$$

Nach Konstruktion sind diese beiden Gleichungen äquivalent zu den Maxwellgleichungen, die physikalischen Felder können jederzeit aus den Potentialen berechnet werden mit

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{118}$$

Die Gleichungen (116) und (117) sind in dreierlei Hinsicht bemerkenswert:

1. Sie sind bequem entkoppelt: Ladung erzeugt das Potential V nach der zweiten Gleichung und Ströme erzeugen das Vektorpotential $\vec{A}$ nach der ersten Gleichung.

2. Für das Vakuum mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ handelt es sich um Wellengleichungen für Potential-Wellen mit Ausbreitungsgeschwindigkeiten $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Es existieren also elektromagnetische Wellen mit fester Ausbreitungsgeschwindigkeit, wie das in der speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt wird.

3. Die beiden rechten Seiten der Gleichung stellen Raum- und Zeitkomponenten eines 4er - Vektors dar. Es liegt nahe, auch aus den linken Seiten einen solchen zu konstruieren.

[Uebungsaufgabe: Mache den Ansatz einer ebenen Potential-Welle im Vakuum (Raumkoordinaten x,y,z) mit

$$\vec{A} = (A_x, 0, 0) \qquad A_x = A_0 \sin(kz - \omega t) \qquad V = 0,$$

zeige, dass dies eine Lösung der Potentialgleichungen (116 und 117) ist, und leite daraus Grösse und Richtung der elektrischen und magnetischen Felder im Raum ab.]

Wir brauchen nun noch einen auf vier Dimensionen verallgemeinerten Laplaceoperator. Wir erinnern uns an die Definition

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \tag{119}$$

Analog definieren wir den **D'Alembert'schen Operator**

$$\Box V = (\nabla^\mu, \nabla^\mu) V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} - \Delta V \tag{120}$$

Beachte, dass das negative Vorzeichen entsprechend der Definition des 4er - Produktes entsteht. Die Definition (100) der kovarianten Ableitung ∇^μ hatte ebenfalls ein negatives Vorzeichen am Raumteil. Drei minus geben wieder ein minus. Der D'Alembert auf einen 4er Vektor angewendet, bedeutet analog zum dreidimensionalen Fall, dass er auf jede Komponente separat angewendet werden soll.

Schliesslich definieren wir das 4er - Potential

$$A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right) \tag{121}$$

Damit wird die Eichtransformation (112) zu

$$(A^\mu)' = A^\mu - \nabla^\mu \psi \tag{122}$$

Ebenso die Lorentzeichung (115)

$$\nabla^\mu A^\mu = 0 \tag{123}$$

Damit können die Potentialgleichungen (116 und 117) in kovarianter Form geschrieben werden:

$$\boxed{\Box A^\mu = \mu_0 \, j^\mu} \tag{124}$$

Dies ist die **kovariante Darstellung der elektrodynamischen Grundgleichungen**. Damit ist die Elektrodynamik tatsächlich kovariant. Diese Gleichungen haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

7.4 Transformation von elektrischen und magnetischen Feldern

Wir betrachten den folgenden, nicht ganz allgemeinen Fall:

Seien die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einem System Σ gegeben. Wie gross sind die Felder $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ in einem System Σ', das sich gegenüber dem System Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ bewegt?

Nachdem wir im vorherigen Kapitel gesehen haben, dass sich das Potential A^μ als 4er - Vektor transformiert, suchen wir die Potentiale zu unseren Feldern. Dann transformieren wir die Potentiale nach der Lorentztransformation (42).

Eine längere Rechnung liefert uns dafür das folgende Resultat ($c = 1$) (Jackson, Seite 552):

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \tag{125}$$

und

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \tag{126}$$

Die Lorentztransformation wandelt also wie erwartet elektrische und magnetische Felder ineinander um. Man beachte auch die perfekte Symmetrie in diesen Gleichung bezüglich Vertauschung von elektrischen und magnetischer Feldstärke.

Alternativ können wir für Bewegungen die Felder in Komponenten parallel und senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit β aufteilen (Feynam II, Seite 26-9):

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\| \qquad\qquad \vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\| \tag{127}$$

Dann erhalten wir für die transformierten Felder:

$$\vec{E}'_\| = \vec{E}_\| \qquad\qquad \vec{B}'_\| = \vec{B}_\| \tag{128}$$

und

$$\vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B})_\perp \qquad \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E})_\perp \tag{129}$$

[Uebungsaufgabe: Diskutiere mit Hilfe dieser Gleichungen qualitativ, was ein bewegter Beobachter im homogenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators für Felder wahrnimmt, für die Fälle der Geschwindigkeit parallel und senkrecht zu den Platten. Versuche die Verbindung zu dem Kapitel 7.1 herzustellen und die Rolle der Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten zu diskutieren.]

[Uebungsaufgabe: Diskutiere das elektrische und magnetische Feldlinienbild einer schnell vorbeiziehenden Punktladung]

7.5 Relativistischer Dopplereffekt

Betrachten wir eine ebene Welle $u = u_0 \sin(kx - \omega t)$, die sich in x-Richtung ausbreitet. Es ist klar, dass das Argument der Sinusfunktion $kx - \omega t$ (die "Phase") eine Lorentzinvariante sein muss. Denn bei jedem ganzahligen Vielfachem von π wird eine Nullstelle der Wellenfunktion erreicht. Dies ist eine physikalische Beobachtung, die nicht vom Bezugssystem abhängen darf. Man nennt diese Forderung die Invarianz der Phase.

Als lorentzinvariante Grösse können wir versuchen, die Phase als 4er Produkt darzustellen. In der Tat ist $x^\mu = (ct, \vec{x})$ ja bereits ein 4er Vektor. Wählen wir

$$k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k}) \qquad \text{wird} \qquad (k^\mu, x^\mu) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} \tag{130}$$

also die Phase einer in eine beliebige Richtung im Raum sich ausbreitenden Welle. Offenbar ist der vierdimensionale Wellenvektor k^μ ein 4er Vektor.

Nun befinde sich eine Lichtquelle im System Σ, das sich mit der Geschwindigkeit β auf der x-Achse von uns wegbewege (System Σ'). Wir transformieren $k^\mu = (\omega/c, k_x, 0, 0)$ nach der Lorentztransformation (43):

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\frac{\omega}{c} - \beta\gamma k_x \qquad \text{und} \qquad k'_x = -\beta\gamma\frac{\omega}{c} + \gamma k_x \tag{131}$$

Da es sich um eine Lichtquelle handelt, ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen gleich:

$$\frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega'}{k'_x} = c \tag{132}$$

Setzen wir dies in der oberen Gleichung (131) ein, erhalten wir

$$\omega' = \omega\gamma(1-\beta) = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \text{den longitudinalen Dopplereffekt} \tag{133}$$

Eine sich von uns wegbewegende Lichtquelle führt also zu einer Rotverschiebung.

Im Gegensatz zum Dopplereffekt in der klassischen Rechnung gibt es den Unterschied zwischen bewegtem Objekt und bewegter Quelle nicht mehr. In der klassischen Rechnung definiert man die Geschwindigkeiten relativ zum Ausbreitungsmedium der Welle (siehe Skriptum zur Physik AII, Seite 101). Ein solches existiert natürlich bei den elektromagnetischen Wellen nicht.

Betrachten wir nun dieselbe Lichtquelle, wie sie sich seitlich an unserem Standort im Abstand y vorbeibewegt, β sei immer noch parallel zur x-Achse. In dem Moment, wo die Ausbreitungsrichtung im System Σ gerade senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Quelle steht, lautet der Wellenvektor $k^\mu = (\omega/c, 0, k_y, 0)$. Darauf wenden wir wieder die Lorentztransformation (43) an:

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\frac{\omega}{c} \qquad k'_x = -\beta\gamma\frac{\omega}{c} \qquad k'_y = k_y \tag{134}$$

Diese Erhöhung der Frequenz nennt man transversaler Dopplereffekt, auch Dopplereffekt zweiter Ordnung. Er tritt in der klassischen Rechnung nicht auf.

Die Ausbreitungsrichtung im System Σ' hat sich offenbar geändert, da ein Term k_x' auftaucht. Diesen Effekt nennt man Aberration des Lichtes.

8 Die Ideen der allgemeinen Relativitätstheorie

Der Erfolg der speziellen Relativitätstheorie für Inertialsysteme motiviert uns (oder besser motivierte Albert Einstein) über eine allgemeinere Theorie nachzudenken, die auch beschleunigte Systeme einbezieht. In der klassischen Theorie haben wir dafür die Scheinkräfte oder Trägheitskräfte eingeführt (Zentrifugalkraft, Corioliskraft). In der klassischen Mechannik wird behauptet, dass man wegen dem Auftreten von Scheinkräften absolut feststellen kann, ob man sich in einem beschleunigten System befindet oder nicht. Von diesen absoluten, ausgezeichneten Systemen wollen wir aber gerade wegkommen.

Bereits Ernst Mach hat 1872, lange vor Einstein, die Feststellung gemacht, dass man Trägheit eine Körpers nur dann feststellen kann, wenn es andere Massen im Universum gibt, mit denen man vergleichen kann, das heisst bezüglich denen man die Beschleunigung messen kann. Die Trägheit wird also erst von der Anwesenheit anderer Masse erzeugt (Mach'sches Prinzip). Und noch viel früher war sich Newton bereits bewusst, das man ein Inertialsystem im Sinne seines ersten Prinzips nur definieren kann, wenn man annimmt, dass es ausgezeichnetes System gibt, in dem der grosse Teil der Masse im Weltall in Ruhe ist.

[Das folgende stammt zur Hauptsache aus Feynman lectures, Band II, Kapitel 42]

8.1 Aequivalenzprinzip

Bereits seit Galilei kennen wir das **schwache Aequivalenzprinzip**. Es besagt, dass die schwere Masse m_g, auf die Gravitationskraft wirkt ($F = m_g \cdot g$) und die träge Masse m_T, die sich der Beschleunigung widersetzt ($F = m_T \cdot a$) stets den gleichen Wert haben. Deswegen beschleunigen im Gravitationsfeld alle Körper mit $a = F/m_T = m_g/m_T \cdot g = g$ unabhängig von ihrer Masse.

Einstein macht nun die Feststellung, dass wir eigentlich auch nicht zwischen Beschleunigung und Gravitation unterscheiden können. Fahren wir mit einem Lift nach oben, spüren wir anfangs eine Beschleunigung. Im geschlossenen Lift können wir aber nicht sicher sein, ob nicht stattdessen jemand die Gravitationskraft erhöht, indem er zum Beispiel eine sehr grosse Masse unten am Lift anbringt. Wir könnten in diesem Lift das Fallexperiment von Galilei wiederholen. Wir würden eine grössere Fallbeschleunigung messen, aber immer noch feststellen, dass alle Körper gleich schnell fallen.

Ein etwas unangenehmeres Gedankenexperiment entsteht, wenn wir annehmen, dass das Seil im Lift reisst, und es keine Fangbremsen hat. Dann fällt der Lift frei nach unten. Im freien Fall heben sich die Beschleunigung und die Gravitationskraft gerade auf, wir spüren überhaupt keine Kraft mehr. Es ist uns auch nicht möglich zu sagen, ob wir nun frei fallen, oder ob jemand einfach schnell die Erde weggenommen hat, oder anderweitig die Gravitationskraft ausgeschaltet hat.

(Trotzdem gibt es in diesem frei fallenden System ein kleiner Effekt der Gravitation: Da das Gravitationsfeld der Erde nicht homogen ist, sondern die Feldlinien nach aussen auseinandergehen, werden zwei in einem bestimmten Abstand sich befindlichen, ruhende Körper sich mit der Zeit näher kommen.)

Einstein postulierte aus dieser Erfahrung das **starke Aequivalenzprinzip**: Die Resultate aller - lokalen - Experimente in einem frei fallenden System sind unabhänging vom Bewegungszustand. Die Resultate sind gleich für alle solchen Bezugssysteme und konsistent mit der speziellen Relativitätstheorie.

Aus dem starken Aequivalenzprinzip folgen die Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein 1915), die eigentlich eine Theorie der Gravitation und der Raumgeometrie ist. Sie ist vor allem für die Betrachtung von astronomischen Objekten und der Kosmologie relevant.

Die allgemeine Relativitätstheorie ist mathematisch sehr anspruchsvoll, und würde den Rahmen dieser propädeutischen Einführung sprengen. Sie muss insbesondere das Problem des inhomogenen Gravitationsfeldes (siehe Klammerbemerkung oben) lösen, und dass das Aequivalenzprinzip jeweils nur in einem Punkt gilt. Dies führt zur Vorstellung des gekrümmten Raumes.

Die konsequente Anwendung des starken Aequivalenzprinzips führt zu den zwei zentralen Gesetzen der Einstein'schen Theorie der Gravitation:

1. Die Krümmung des Raumes hängt von der Massenverteilung ab. Die Formeln dafür (Einstein'sche Feldgleichungen) lauten in allen Bezugssystemen gleich.
2. Die Bewegung von Objekten - bei gegebenen Anfangsbedingungen - läuft stets so ab, dass deren Eigenzeit maximal ist.

8.2 Gravitative Rotverschiebung

Die gravitative Rotverschiebung kann man direkt aus dem Aeuquivalenzprinzip einsehen, ohne die Anwendung eines komplizierten mathematischen Apparates.

Seien zwei identische Lichtsender mit Frequenz ω_0 in einer Rakete montiert, eine im Spitz A und eine am Boden B, der Abstand zwischen A und B sei H. Ein Physiker sitzt bei B auf den Boden und beobachtet das Eintreffen der Blitze von A und B. Nun werde die Rakete mit der Beschleunigung g nach oben beschleunigt.

Was passiert? Da das Licht von A früher ausgesandt wurde als B, war zur Sendezeit von A die Geschwindigkeit noch kleiner, als zum Zeitpunkt des Empfanges. Wir erwarten eine relativistische, longitudinale Dopplerverschiebung von

$$\omega = \omega_0 \gamma (1 + \frac{v}{c}) \tag{135}$$

Das Licht von B verändert sich dabei nicht, da es nur eine ganz kurze Laufzeit hat. Wie gross ist der Geschwindigkeitsunterschied? Nehmen wir an, die Geschwindigkeit sei noch klein ($\gamma \approx 1$), und die Rakete sei ein perfekt starrer Körper. Dann wird die Laufzeit des Lichtes etwa H/c. Der Geschwindigkeitsunterschied ist deshalb $gt = gH/c$. Das heisst wir messen eine relative Frequenzverschiebung zwischen A und B von

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{gH}{c^2} \tag{136}$$

Das Aequivalenzprinzip sagt nun, dass es keinen Unterschied geben darf, zwischen der mit g beschleunigten Rakete, und dem auf der Erde ruhenden System. Daraus folgt, dass wir auch auf der Erde eine Frequenzverschiebung messen müssen. Der Wert aus obiger Formel wird etwa 10^{-16} pro m Höhenunterschied. Er ist inzwischen mit grosser Genauigkeit experimentell bestätigt worden. Obschon der Effekt so klein ist, spielt er bei den globalen Positionssystemen (GPS) eine Rolle.

Anhand dieses Effektes kann man leicht einsehen, was gemeint ist mit dem Begriff gekrümmter Raum. Setzen wir uns auf die Erde und betrachten wir wieder die beiden Sender A am Boden und B auf der Höhe H. Wenn man nun im Orts- Zeitdiagramm vorerst die Weltlinie des Punktes B für 100 sec. dessen Zeit aufträgt, kommt man zum Ereignis B'. Dasselbe tun wir für 100 sec. Zeit des Senders A, was uns zum Ereignis A' führt. Wegen der gravitativen Zeitverschiebung sind nun die beiden Ereignisse A' und B' nicht gleichzeitig. Die Figur A'-A-B-B'-A' ist kein Rechteck. Das ist gemeint, wenn man vom gekrümmten Raum spricht.

8.3 Ablenkung des Lichtes

Eine Konsequenz der ART ist die richtige Berechnung der Ablenkung von Lichtstrahlen im durch die anwesenden Massen gekrümmten Raum. Das Licht pflanzt sich grundsätzlich entlang den Geodäten fort, das heisst entlang den Linien des "kürzesten Weges".

Qualitativ wird manchmal die Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfeld auch ohne allgemeine Relativitätstheorie versucht zu erklären: Man ordnet den Quanten des Lichtes eine Masse zu, die deren Energie entspricht. Dann berechnet man die Bahnablenkung eines solchen Lichtquantes "mit Masse" mit den Newtonschen Gesetzen. Man erhält zum Beispiel für die Ablenkung des Lichtes eines entfernten Sternes, das Nahe an der Sonne vorbeigeht, eine Ablenkung, die um einen Faktor 2 falsch ist.

Diese Ueberlegung ist denn auch falsch. Richtig ist vielmehr, dass sich die Lichtquanten entlang der Geodäten bewegen. Das Gravitationsfeld krümmt den Raum. In der ART wird die Gravitation als geometrischer Effekt beschrieben.

Der Effekt der Lichtablenkung ist experimentell anhand von Sternenlicht gemessen worden, das von der Sonne abgelenkt wird. Für streifend an der Sonnenoberfläche vorbeistrahlendes Licht beträgt der Effekt 1.75 Bogensekunden.

Grössere Massen können Sternenlicht so ablenken, dass es wie in einer Linse fokussiert wird (Gravitationslinsen). Dieses Phänomen wird in der Astrophysik oft beobachtet und zur Untersuchung von Massenverteilungen eingesetzt.

Bei sehr grossen Gravitationsfeldern kann die Lichtablenkung so gross werden, dass das Licht das Gravitationsfeld nicht mehr verlassen kann. Man spricht von einem Schwarzen Loch. Bei einer kugelsymmetrischen Anordnung bezeichnet man den Radius, innerhalb dessen kein Licht mehr nach aussen dringen kann, als Schwarzschildradius:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{137}$$

Er beträgt für die Masse der Erde 4.4 mm. Wäre also die gesamte Masse der Erde innerhalb einer Kugel mit Radius 4.4 mm konzentriert, wäre die Erde ein schwarzes Loch.

8.4 Weitere Anwendungen der allgemeinen Relativität

Die allgemeine Relativitätstheorie (ART) beschreibt eine Periheldrehung von Keplerbahnen, die anhand des Merkurs mit grosser Genauigkeit verifiziert wurde. Verschiedene andere Messungen im Sonnensystem bestätigen gemeinsam die ART mit einer Genauigkeit von etwa 10^{-3}.

Die ART sagt auch Gravitationswellen (im gewissen Sinne analog zu den elektromagnetischen Wellen) voraus. Experimentelle Anstrengungen werden gemacht, um die mit einer Gravitationswelle veknüpften Abstandsänderungen nachzuweisen, allerding bisher ohne Erfolg.

Aber Pulsare in Doppelsternsystemen zeigen eine langsame Reduktion der Umlaufzeiten. Dieser Effekt kann durch die Abstrahlung von Gravitationswellen erklärt werden. In diesem Sinn ist eine indirekte Beobachtung von Gravitationswellen bereits möglich. Die Genauigkeit des Vergleichs zwischen Messung und Theorie beträgt hier ebenfalls etwa 10^{-3}.

Schliesslich liegt die ART allen kosmologischen Modellen zugrunde, die die Entwicklung des Universums zu beschreiben versuchen.